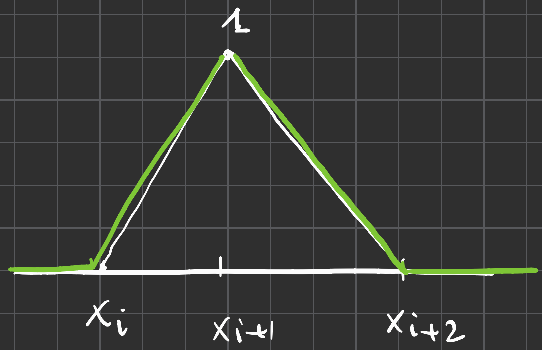
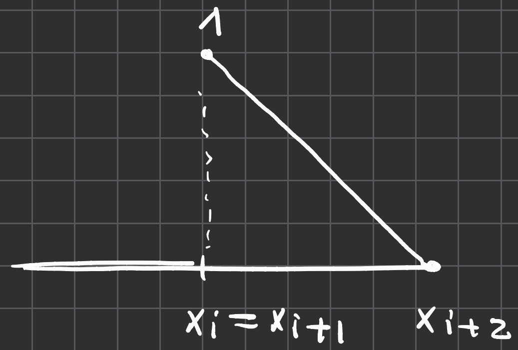
Lezione 18 (22 dicembre 2023)

B-splines



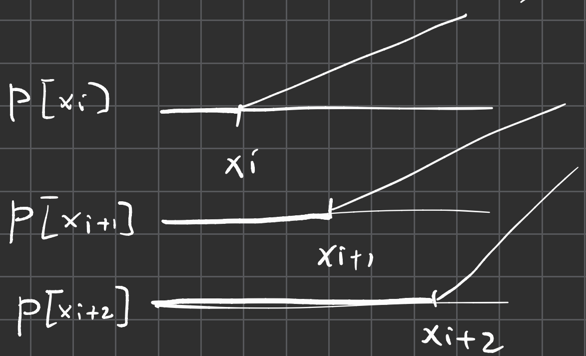
supp $B_{i,2} = [x_i, x_{i+2})$

Se $x_i = x_{i+1}$



$p(x;t) = (x-t)_+$

$$B_{i,2}(x) = \cancel{(x_{i+2}-x_i)}\left[\frac{p[x_{i+1},x_{i+2}](x) - p[x_i,x_{i+1}](x)}{\cancel{x_{i+2}-x_i}}\right]$$



$$= \frac{p[x_{i+2}](x) - p[x_{i+1}](x)}{x_{i+2}-x_{i+1}} - \underbrace{\frac{p[x_{i+1}](x) - p[x_i](x)}{x_{i+1}-x_i}}_{-\frac{\cancel{x}-x_{i+1}-\cancel{x}+x_i}{x_{i+1}-x_i} = 1}$$

Se $x \in [x_i, x_{i+1}]$ degenere (ovvero $x = x_i = x_{i+1}$)

$$B_{i,2}(x) = \cancel{\frac{\overbrace{p[x_{i+2}](x)}^{0} - \overbrace{p[x_{i+1}](x)}^{0}}{x_{i+2}-x_{i+1}}} + 1$$

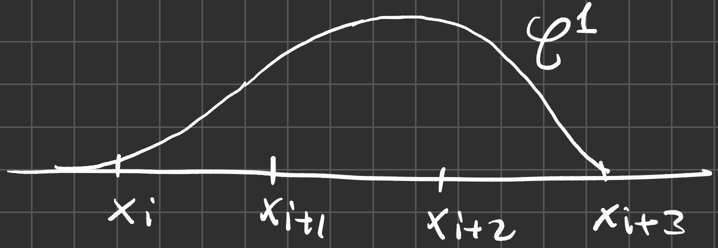
$$= 1$$

ho ragionato come se fossero distinti

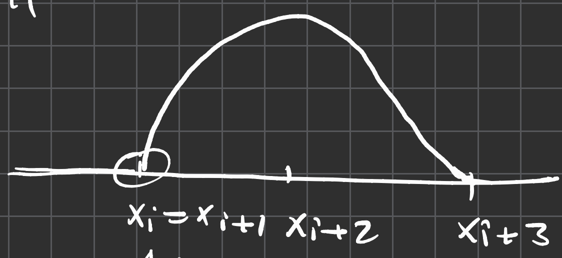
CONCLUSIONE

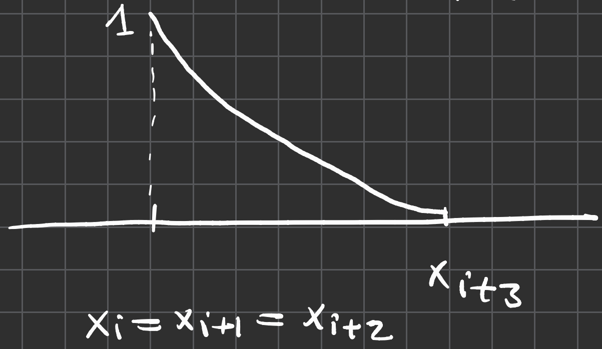
Se il nodo ha molteplicità uguale all'ordine in quel punto la B-spline diventa discontinua

Caso $k=3$ quadratico



Se $x_i = x_{i+1}$





Che le splines consentono di avere maggiore flessibilità aumentando o diminuendo la molteplicità dei nodi

B-splines si possono scrivere usando una relazione di ricorrenza a 3 termini

Consideriamo B-splines non normalizzate ovvero

$$N_{i,k}(x) = \frac{B_{i,k}(x)}{x_{i+k} - x_i}$$

$$p(x;t) = (t-x)_+^{k-1} = \underbrace{(t-x)}_{f(x)} \underbrace{(t-x)_+^{k-2}}_{g(x)}$$

Osservo che

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

$$= \frac{x_{i+1} - x - x_i + x}{x_{i+1} - x_i}$$

$$= 1$$

e le D.D. di ordine superiore sono nulle

$$N_{i,k}(x) = (f \cdot g)[x_i, \dots, x_{i+k}]$$

IDENTITÀ DI STEFFENSEN

$$= \sum_{j=0}^{k} f[x_i, \dots, x_{i+j}]\, g[x_{i+j}, \dots, x_{i+k}]$$

$$= f(x_i)\, g[x_i, \dots, x_{i+k}] +$$

$$\underbrace{f[x_i, x_{i+1}]}_{=1}\, g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] + 0$$

$$= f(x_i)\, \frac{g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - g[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$$+ g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$$

$$= \left(\frac{x_i - x}{x_{i+k} - x_i} + 1 \right) \underbrace{g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]}_{N_{i+1,k-1}}$$

$$- \left(\frac{x_i - x}{x_{i+k} - x_i} \right) \underbrace{g[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}_{N_{i,k-1}}$$

$$N_{i,k}(x) = \left(\frac{x_i - x}{x_{i+k} - x_i} + 1 \right) N_{i+1,k-1}(x) +$$

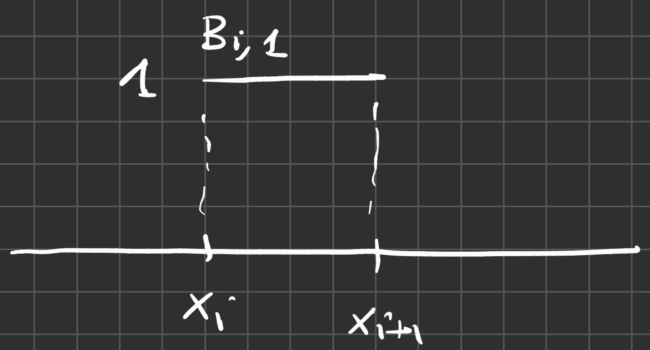
$$\left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} \right) N_{i,k-1}(x)$$

moltiplicando per $x_{i+k} - x_i$ si ottiene

$$\boxed{B_{i,k}(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k-1} - x_i}\right) B_{i,k-1}(x) + \left(\frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_{i+1}}\right) B_{i+1,k-1}(x) \qquad (1)}$$

è vero per ogni $k \geq 2$

Nota chi sono $B_{i,1}(x)$



Regola di Steffensen

$$(f \cdot g)[x_0, x_1] = f(x_0)\, g[x_0, x_1] + f[x_0, x_1]\, g(x_1)$$

$$\overset{!}{=} f(x_0) \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} g(x_1)$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_0} \Big(\cancel{f(x_0) g(x_1)} - f(x_0) g(x_0) + f(x_1) g(x_1) - \cancel{f(x_0) g(x_1)} \Big)$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_0} \left(f(x_1) g(x_1) - f(x_0) g(x_0) \right)$$

$$= \frac{f(x_1) g(x_1) - f(x_0) g(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Per dimostrarlo per $n > 1$ si usa l'induzione

B-Splines

- Funzioni a supporto compatto
- Sono positive nel loro supporto
- $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(x) = 1 \implies$ Partizione dell'unità
- Si possono calcolare con la relazione di ricorrenza (1)
- B-splines sono una base polinomiale

Interpolazione con splines

Sia f nota sui punti $t_1, \ldots, t_m$

Desideriamo interpolarla con una spline di ordine n (grado $n-1$) con prescritti nodi $x_1, \ldots, x_{N-1}$

interni

Inoltre $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ e

$$t_1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < t_m$$

m = dimensione dello spazio delle spline

$$m = N-1+n$$

Affinché esista la soluzione e sia unica i nodi devono soddisfare le condizioni di Schoenberg-Whitney

$$t_1 < x_1 < t_{n+1}$$

$$t_2 < x_2 < t_{n+2}$$

$$\vdots$$

$$t_{N-1} < x_{N-1} < t_m$$

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot B_{i,n}(x) \qquad (2)$$

dove $B_{i,n}$ sono B-splines di ordine n costruite sui nodi $x_1, \dots, x_{N-1}$

Imponendo le condizioni d'interpol.

$$s(t_j) = f(t_j) \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} c_i \, B_{i,n}(t_j) = f(t_j)}$$

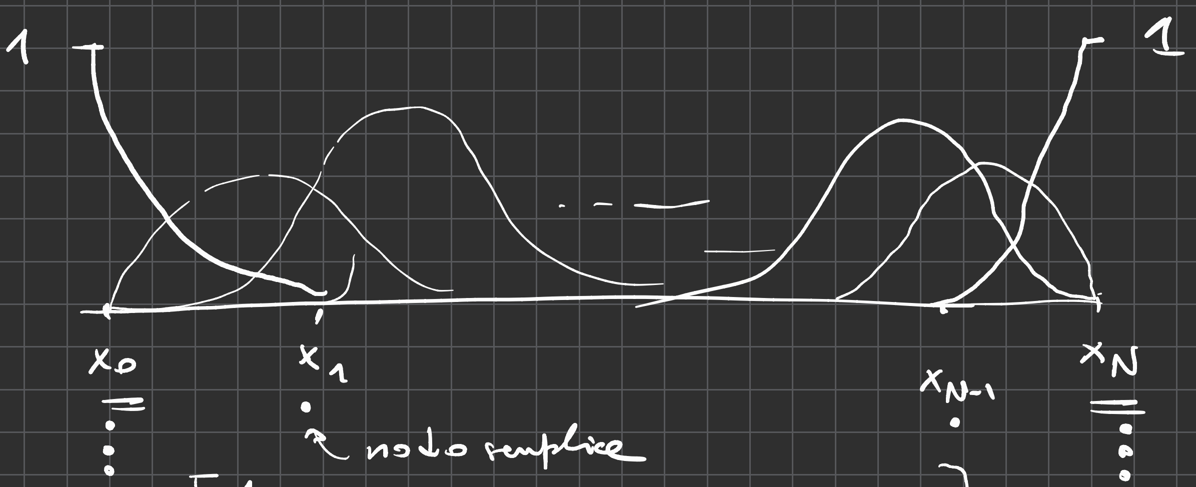
Nella pratica si aggiungono nodi ai bordi

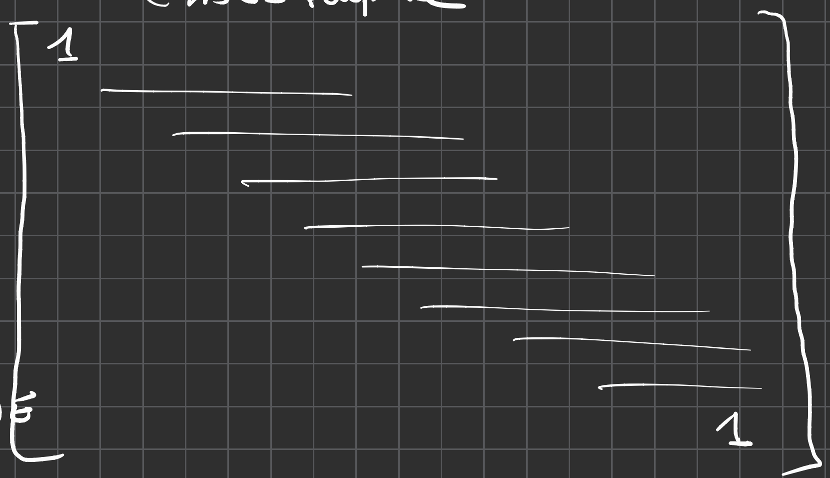
Si considerano $2n$ nodi addizionali

$$x_{1-n}, \dots, x_0 \le t_1 \qquad x_{1-n} < x_{2-n} < \dots < x_0$$

$$t_m \geq x_N, x_{N+1}, \dots x_{N+n-1} \qquad x_N > x_{N+1} > \dots > x_{N+n-1}$$

Si possono scegliere COINCIDENTI ottenendo una base





MATRICE D' INTERPOLAZIONE

MATRICE a BANDA con Banda pari all'ordine

NB Somma per righe è sempre 1

APPROSSIMAZIONE DI BERNSTEIN

$[a,b]=[0,1]$. Sia k grado fissato

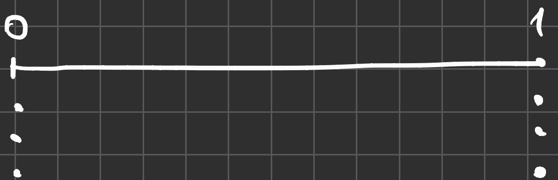
Costruiamo la base B-spline sulla sequenza di nodi

$$x_0=x_1=\dots=x_k=0$$

$$x_{k+1}=x_{k+2}=\dots=x_{2k+1}=1$$

nodi (multipli con molteplicità pari all'ordine)
ordine $k+1$

caso $k=2$



caso quadratico

In questo caso la base B-spline

ottenuta dalla relazione di ricorrenza delle B-spline

$$\boxed{B_i^k(x) = x\, B_i^{k-1}(x) + (1-x)\, B_{i+1}^{k-1}(x)}$$

$$\boxed{B_i^k(x) = \binom{k}{i} x^i (1-x)^{k-i} \qquad i=0,\dots,k}$$

polinomi di BERNSTEIN

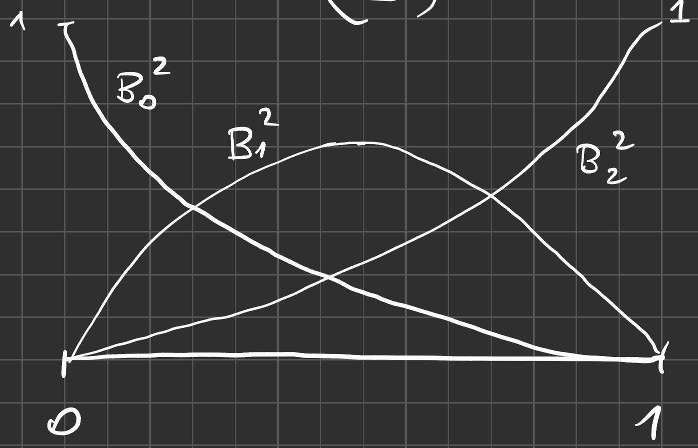
Sono polinomi di grado k, positivi

Esempio $k=2$

$$B_0^2(x) = \binom{2}{0} x^0 (1-x)^{2-0} = (1-x)^2$$

$$B_1^2(x) = \binom{2}{1} x (1-x) = 2x(1-x)$$

$$B_2^2(x) = \binom{2}{2} x^2 (1-x)^0 = x^2$$



$$B_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}}_{B_i^n(x)}$$

Operatore di Bernstein

è costruito facendo un campionamento di f su $n+1$ punti equispaziati:

$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$

Questo operatore consente di dimostrare il TEOREMA di WEIRSTRASS

$\forall f \in \mathcal{C}[a,b]$ dato $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio di grado n t.c.

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

Notate che $B_n(f;0) = f(0)$

e $\quad B_n(f;1) = f(1)$

Perchè? Prendiamo $x=0$

$$B_n(f;0) = f(0)\,B_0^n(0) + \underbrace{f\left(\tfrac{1}{n}\right)B_1^n(0)}_{0} \dots + \dots + \underbrace{f(1)\,B_n^n(0)}_{0}$$

$$= f(0)\,\underbrace{B_0^n(0)}_{=1} = f(0)$$

$$B_n(f;1) = \underbrace{f(1)\,B_0^n(1) + \dots}_{=0} + f(1)\,\underbrace{B_n^n(1)}_{=1}$$

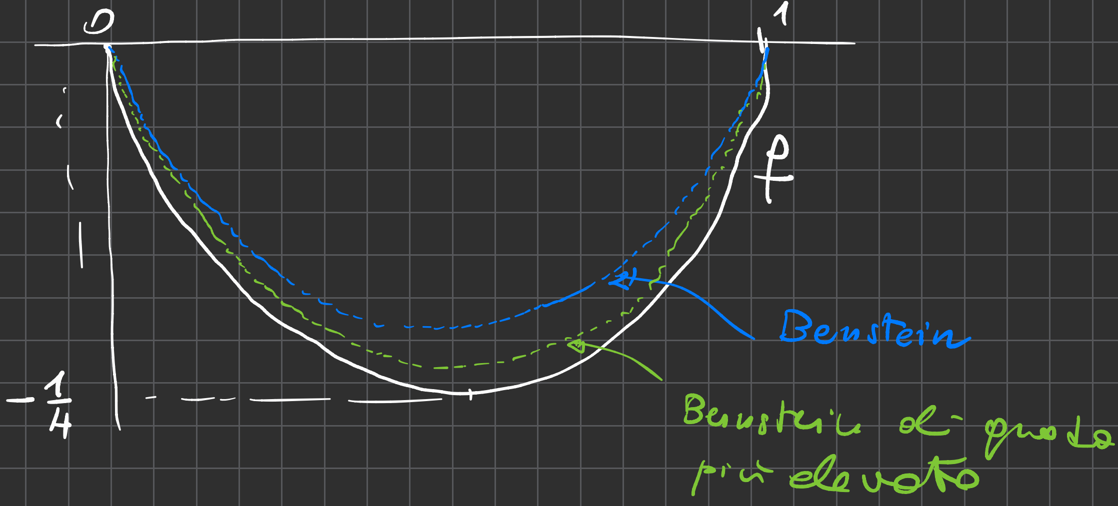
$$= f(1)$$

L' operatore di Bernstein interpola agli estremi, 0 e 1 ed è t.c.

$$\lim_{n \to +\infty} B_n(f;x) = f(x)$$

con convergenza su ogni punto di continuità di f. Se f è continua su tutto $[0,1]$ la convergenza sarà uniforme.

Esempio $\quad f(x) = x(x-1)$



CURVE B-SPLINE e di BÉZIER

$t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ e $P_0, \dots, P_{n-1}$

siano n punti del piano $\mathbb{R}^2$

$$P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

- La curva B-spline di ordine k associata al POLIGONO di CONTROLLO

$$\mathcal{P} = \{ P_0, \dots, P_{n-1} \}$$

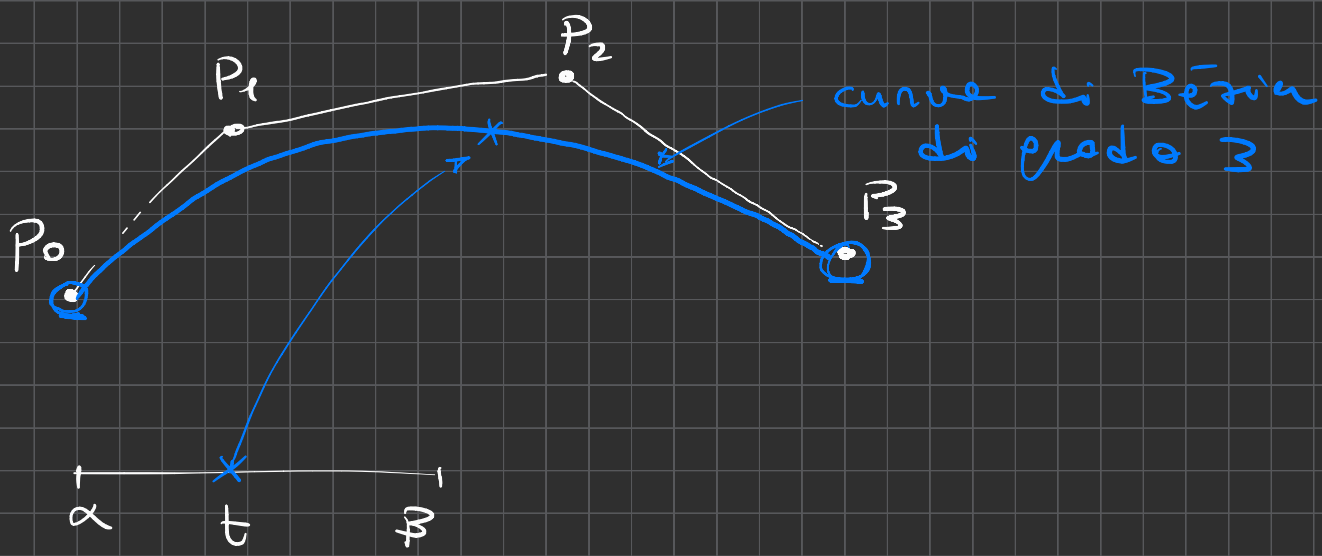
è la curva

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \, B_{i,k}(t) \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

$$s(t) \ni \sigma = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x_i \, B_{i,k}(t) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i \, B_{i,k}(t) \end{pmatrix}$$

Curve di BÉZIER

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \underbrace{B_i^{n-1}(t)}_{\text{polinomio di Bernstein di grado } n-1} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$



Come costruire numericamente la curva di Bézier?

Mediante l'**ALGORITMO DI DE CASTELJAU**

Si parte dal poligono di controllo

$$P = \{P_0, \dots, P_n\}$$

il generico punto appartenente alla curva di Bézier si determina seguendo i seguenti passi

(i) Passo di inizializzazione

$$b_i^{(0)}(t) = P_i \qquad i = 0, \dots, n$$

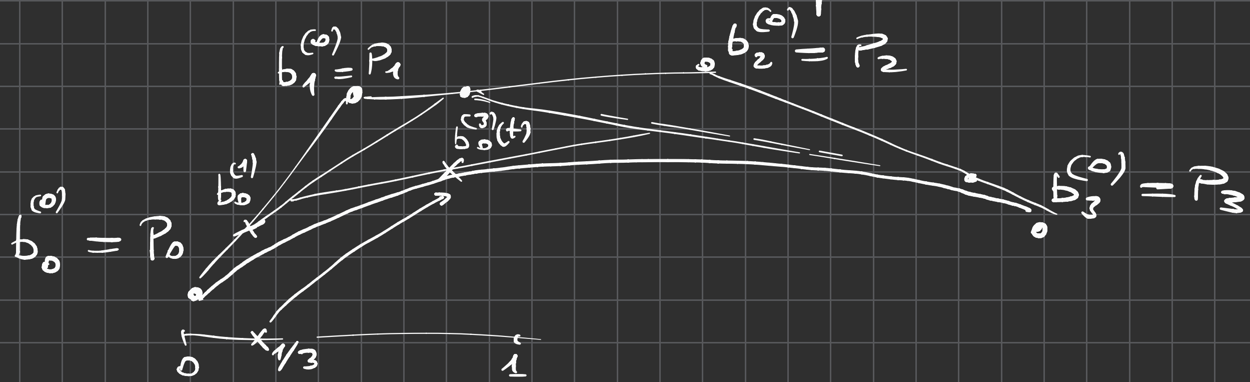
(ii) passo iterativo

$$b_i^{(r)}(t) = (1-t)\, b_i^{(r-1)}(t) + t\, b_{i+1}^{(r-1)}(t)$$

$$r = 1, \dots, n$$
$$i = 0, \dots, n-r$$

alla fine

$b_0^{(n)}(t)$ è il punto sulla curva corrispondente al valore t del parametro



$i=1$, $t = \frac{1}{3}$ $\qquad t \in [0,1]$

$$b_0^{(1)} = \left(1-\tfrac{1}{3}\right) b_0^{(0)} + \tfrac{1}{3}\, b_1^{(0)}$$

$$b_1^{(1)} = \left(1-\tfrac{1}{3}\right) b_1^{(0)} + \tfrac{1}{3}\, b_2^{(0)}$$

$$b_2^{(1)} = \left(1-\tfrac{1}{3}\right) b_2^{(0)} + \tfrac{1}{3}\, b_3^{(0)}$$

ecc. - -