<u>Lezione 17</u> (20 dicembre 2023)

Interpolazione di HERMITE o OSCULATORIA

L'idea è di costruire un polinomio che interpola i valori $(x_i, f(x_i))$ e

$(x_i, f'(x_i))$ $\quad i = 0, \dots, n$

$2n+2$ condizioni

che ci consentono di costruire un polinomio di grado $2n+1$

Imponendo le condizioni d'interpolazione

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$$
$$P'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$$

potremmo determinare i coefficienti

Invece seguiremo una costruzione simile a Lagrange

$$\boxed{P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} v_i(x) f'(x_i)}$$

dove i <u>polinomi elementari di Hermite</u>, (di grado $2n+1$)

u_i e v_i sono esprimibili in

funzioni dei polinomi elementari di

Lagrange

$$\boxed{\begin{aligned} u_i(x) &= \left(1 - l_i'(x_i)(x - x_i)\right) l_i^2(x) \\ v_i(x) &= (x - x_i)\, l_i^2(x) \end{aligned}}$$

dove l_i sono i polinomi elementari di Lagrange di grado n

Le funzioni u_i e v_i sono tali che

$$u_i(x_k) = \delta_{ik}$$

$$v_i(x_k) = 0, \quad u_i'(x_k) = 0 \qquad \forall k$$

$$v_i'(x_k) = \delta_{ik}$$

Queste osservazioni permettono di dire che P_{2n+1} è un polinomio interpolante

$$(x_i, f(x_i)) \quad e \quad (x_i, f'(x_i))$$

<u>Esempio</u> $\quad n = 1 \implies 2n+1 = 3$

$\{x_0, x_1\}$ sono i nodi e in corrispond. avremo i valori $f(x_0), f(x_1)$ $f'(x_0)$ e $f'(x_1)$

$$\ell_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \qquad \ell_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$\ell_0'(x_0) = \frac{1}{x_0-x_1} = \ell_0'(x_1)$$

$$\ell_1'(x_0) = \frac{1}{x_1-x_0} = \ell_1'(x_1)$$

$$u_0(x) = \left(1 - \ell_0'(x_i)(x-x_0)\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 = \frac{2x_0-x_1-x}{(x_0-x_1)^3}(x-x_1)^2$$

Analogamente si costruire $u_1(x)$ $v_0(x)$ e $v_1(x)$

$$u_1(x) = \frac{2x_1-x_0-x}{(x_1-x_0)^3}(x-x_0)^2$$

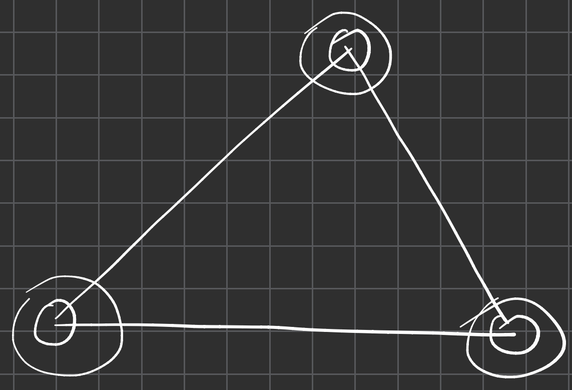
$$v_0(x) = (x-x_0)\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}$$

$$v_1(x) = (x-x_1)\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}$$

$$h_3(x) = u_0(x)f(x_0) + u_1(x)f(x_1) + v_0(x)f'(x_0) + v_1(x)f'(x_1)$$

$$h_3'(x) = u_0'(x)f(x_0) + u_1'(x)f(x_1) +$$

$+ \psi_0'(x) f(x_0) + \psi_1'(x) f'(x_1)$



Osservazione sulle D.D.

$f[x_0, \dots, x_n]$ è invariante per permutazione dei nodi

Lo si può vedere in maniera più fonda usando la proprietà

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_k - x_j)}$$

Questa si dimostra per induzione

$n = 1$ $\qquad f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$$= \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

per $n > 1$, è vero per n e si prova per $n+1$

Finora abbiamo visto come costruire polinomi globali, significa un unico polinomio interpolante i dati noti.

Il problema dell'interpolazione globale è il fenomeno di Runge cioè aumentando il grado (ovvero il numero dei nodi) si creano oscillazioni che aumentano l'errore

Come ovviare al fenomeno di Runge?

Una soluzione la conosciamo e consiste nella scelta dei nodi di Chebyshev invece che nodi equispaziati.

Ma nelle applicazioni i nodi sono fissati dal problema

In tal caso si ricorre all'interpolazione polinomiale "a tratti" (in inglese si chiama piecewise polynomial interpolation)

L'idea è sostanzialmente quella di usare polinomi di basso grado (es. 1, 2, 3) su una partizione dell'intervallo a tra due punti consecutivi.

Ne consegue maggiore flessibilità e stabilità.

- Si prende $[a,b]$ e lo si suddivide con un insieme $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$

I_i sottointervallo i-esimo

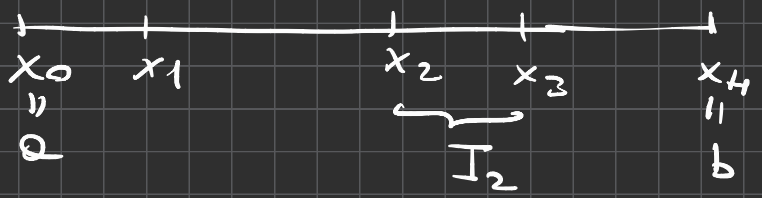
- Su ogni I_i si opera un'interpolazione di grado basso (1, 2, 3)

Rispetto all'interpolante globale

perderemo regolarità ma guadagneremo in stabilità

Caso lineare

$I_i = [x_i, x_{i+1}]$

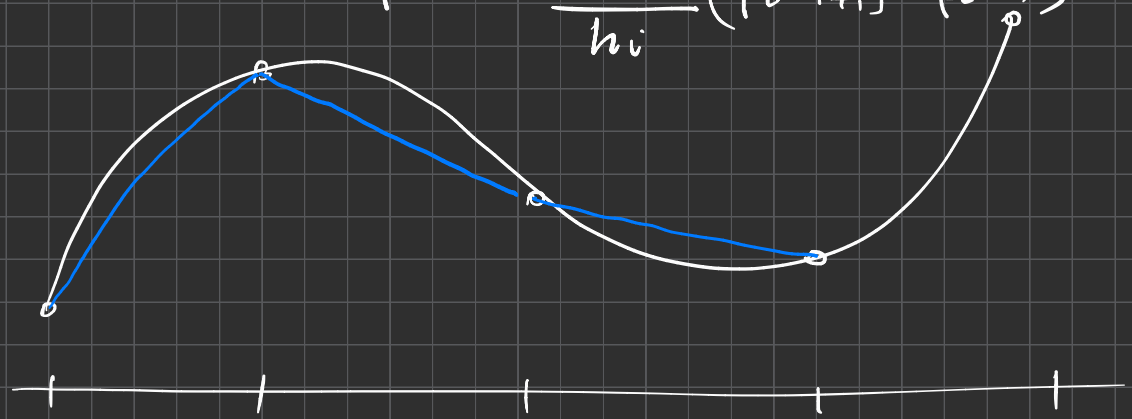


$h_i = x_{i+1} - x_i$ $\qquad$ $x_0 < x_1 < \dots$

Su ogni sottointervallo consideriamo il polinomio di 1° grado

$$p_{1,h_i}(x) = f(x_i) + (x - x_i)\,\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{h_i}}$$

$$= f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{h_i}\big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)$$



Se h_i è molto piccola otteremo un'approssimazione molto buona della nostra funzione

Questo è quello che fa PLOT di MATLAB

Posto $H = \max_{1 \leq i \leq n-1} h_i$

se $f \in \mathcal{C}^2 [a,b]$

$$\max_{x \in I} | f(x) - P_{1,H}(x) | \leq \frac{H^2}{8} \underbrace{\max_{x \in I} | f''(x) |}_{\text{è limitata}}$$

per $H \to 0$ allora ci sarà convergenza

Come generalizzare questa idea?

Definizione

S è un polinomio continuo a tratti in $[a,b]$ di grado k se $S \in \mathcal{C}[a,b]$

ed esistono ξ_i $i = 0, \dots, n$ $\xi_i < \xi_{i+1}$

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$$

tali che S è di grado $\leq k$ su ogni intervallino $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ $i = 0, \dots, n-1$

Tra le funzione continue a tratti le più usate sono le funzioni SPLINES e di BÉZIER

Tra l'altro in MATLAB esiste la funzione SPLINE che consente di costruire una <u>spline interpolante cubica</u>

x = vettore nodi

y = " dei valori della funzione nei nodi

z (con length(z) >> length(x))

z = vettore di punti di valutazione

s = spline(x, y, z)

s = valori della spline cubica nei punti di valutazione z.

SPLINES POLINOMIALI

Def

Una funzione s è una spline polinomiale di grado k se oltre ad essere un polinomio di grado k è $\mathcal{C}^{k-1}[a,b]$. I punti

$x_i \quad i = 1, \dots, n-1$ sono detti nodi interni.

$S(k; \underbrace{x_0, \dots, x_n}_{\Delta})$ è lo spazio lineare delle splines di grado k

Una spline si può scrivere

$$S(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j x^j + \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{n-1} d_j (x - x_j)_+^k$$

$x \in [a,b]$

Notiamo che ci sono $k+n$ parametri (c_j, d_j) che ci danno informazione sulla dimensione dello spazio polinomiale

Lo spazio polinomiale delle spline di grado k ha dimensione $n+k$

$$n+k = \underbrace{k+1}_{\text{ordine}} + \underbrace{n-1}_{\text{nodi interni}}$$

ordine di un polinomio = grado + 1

$(x-x_j)_+^k$ si chiama POTENZA TRONCATA

$$(x-x_j)_+^k = \max\{0, (x-x_j)^k\}$$

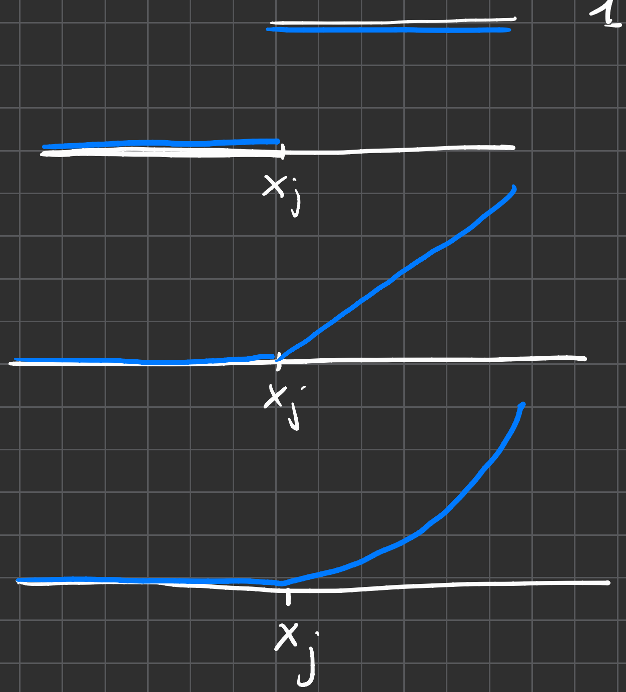
$$= \begin{cases} (x-x_j)^k & x > x_j \\ 0 & x \leq x_j \end{cases}$$

Esempi

$k=0$

$k=1$

$k=2$



ecc....

B- splines (Basic splines)

La i-esima B-spline di ordine k costruita sui nodi $x_i, \ldots, x_{i+k}$ (grado $k-1$) è la k-esima differenza divisa normalizzata di

$$p(x;t) = (x-t)_+^{k-1}$$

ovvero

$$B(x;\ x_i, \dots, x_{i+k}) = (x_{i+k} - x_i)\, p[x_i, \dots, x_{i+k}](x)$$

Esempio

$k = 2$ ordine 2, B-splines lineari

$$B(x;\ x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = (x_{i+2} - x_i)\, \underbrace{p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}(x)$$

$$p(x;t) = (x-t)_+^1 = (x-t)_+$$

Cerchiamo di capire cos'è $p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$

$$\boxed{p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{p[x_{i+1}, x_{i+2}] - p[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}}$$

$$p[x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{p(x_{i+2}) - p(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} = 1$$

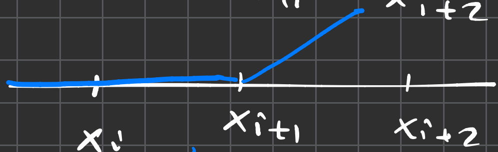
$$p[x_i, x_{i+1}] = \frac{p(x_{i+1}) - p(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = 2$$

$$\boxed{p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{p(x_{i+2}) - p(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{p(x_{i+1}) - p(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}$$

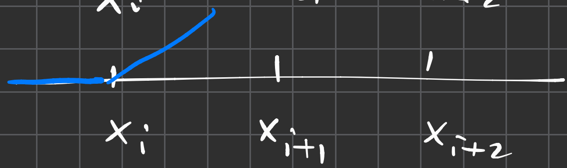
1

$p(x_{i+2}) = (x - x_{i+2})_+$

$p(x_{i+1}) = (x - x_{i+1})_+$



$p(x_i) = (x - x_i)_+$



Pertanto

Se $x < x_i$ $\quad p(x_{i+2}) = 0, \quad p(x_{i+1}) = 0, \quad p(x_i) = 0$

$$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x) = 0$$

$x_i \le x < x_{i+1}$ $\quad p(x_i) = (x - x_i)_+ = x - x_i$

$$p(x_{i+1}) = 0 = p(x_{i+2})$$

$$p[x_i, x_i, x_{i+2}](x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

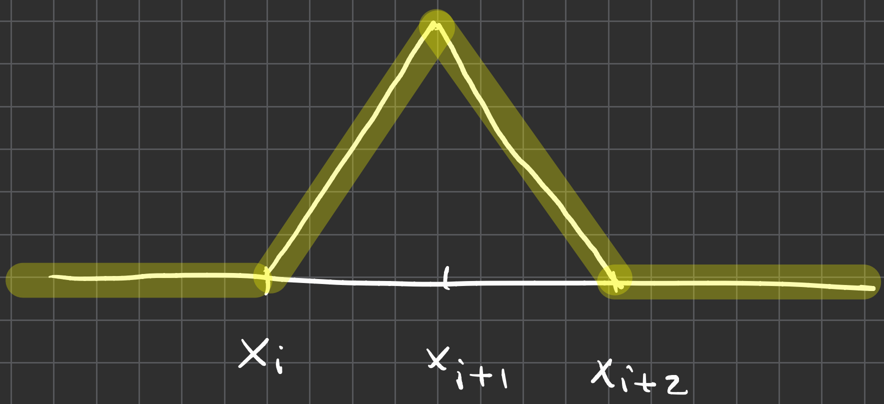
$x_{i+1} \le x < x_{i+2}$ $\quad p(x_{i+1}) = x - x_{i+1}$

$$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{-p(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{p(x_{i+1}) - p(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$= \frac{-(x - x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{\cancel{x} - x_{i+1} - \cancel{x} + x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

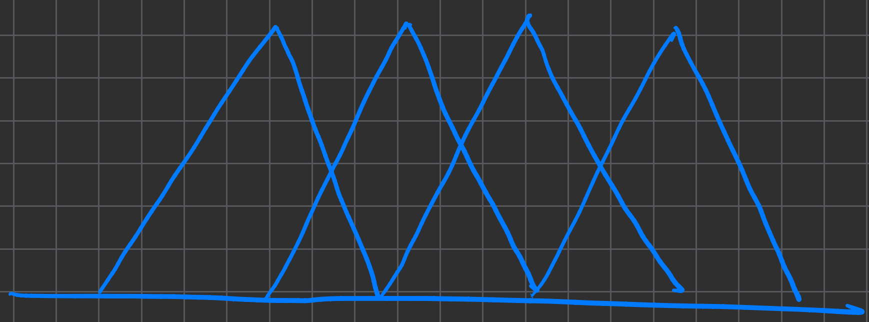
$$= -\frac{(x - x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} + 1$$

$$= 1 - \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$



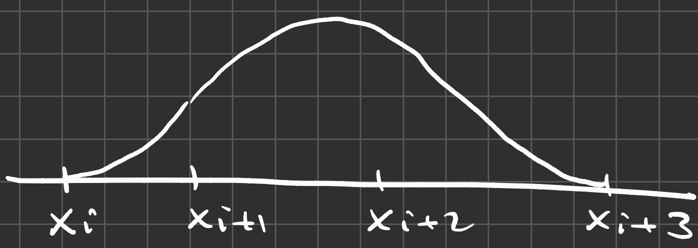
FUNZIONE "CAPPELLO"

$x \geq x_{i+2}$ $\qquad p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = 0$



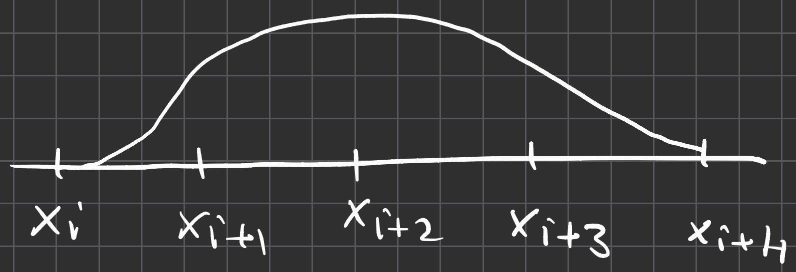
B-SPLINES lineari

Le B-splines quadratiche o di ordine 3

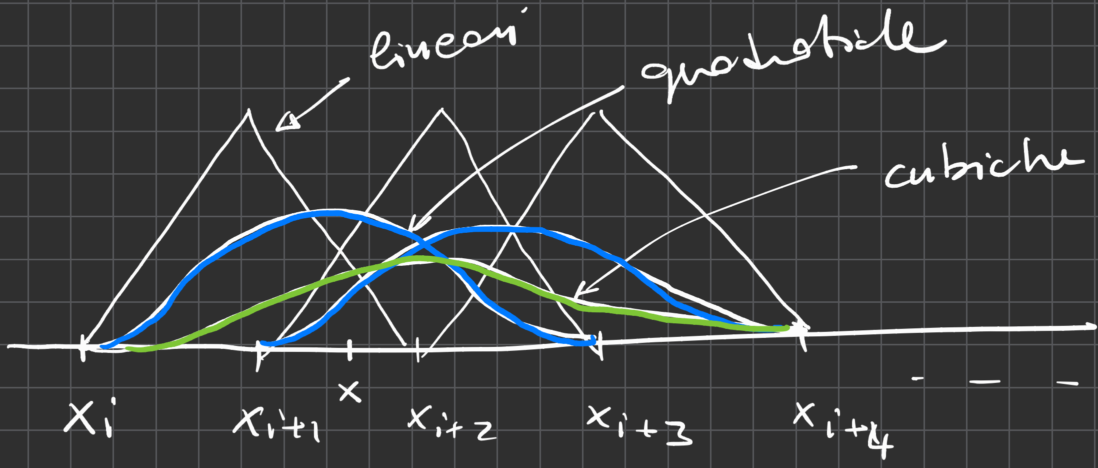


Bell-shaped functions

Quelle di ordine 4, le B-spline cubiche



Notate che all'aumentare del grado diminuisce il valore della B-splines



$B_{i,k} = 0 \qquad x \notin [x_i, x_{i+k})$

$B_{i,k} > 0 \qquad x \in [x_i, x_{i+k})$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(x) = 1$$

$\Rightarrow$ formano una partizione dell'unità.