Università degli Studi di Padova

Il teorema di Gauss
I conduttori

Il campo elettrico: distribuzione continua

Fino ad ora abbiamo imparato a studiare l'andamento del campo elettrico generato da cariche puntiformi, come possiamo ottenere il valore del campo elettrico generato da una distribuzione continua di cariche?
Possiamo sfruttare la simmetria della distribuzione?

Sfruttando il principio di sovrapposizione delle cariche e ragionando in termini di contributi infinitesimi possiamo scrivere che:

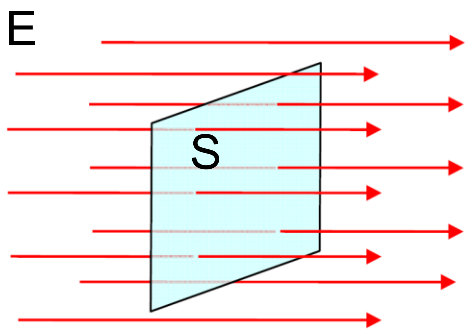
$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,\widehat{u'}$$

Non è sempre semplice risolvere questi integrali

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r'^2}\,\widehat{u'}$$

Il flusso del campo elettrico

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



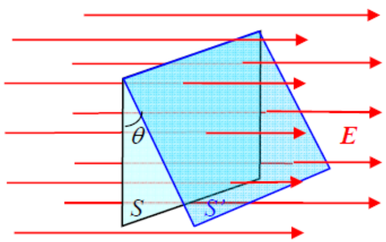
Consideriamo un campo uniforme E ed una superficie piana S perpendicolare alle linee di campo.

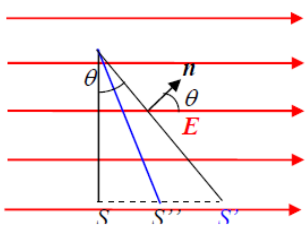
Definiamo flusso del campo E attraverso la superficie S la quantità: $\boxed{\Phi_E = E \cdot S}$

Graficamente il flusso valuta il numero delle linee di campo che attraversano la superficie considerata.

Data una superficie S' tale che : $S = S' \cdot \cos\,\theta$

abbiamo che S ed S' sono attraversate dallo stesso numero di linee di campo quindi possiamo generalizzare scrivendo che: $\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\theta.$



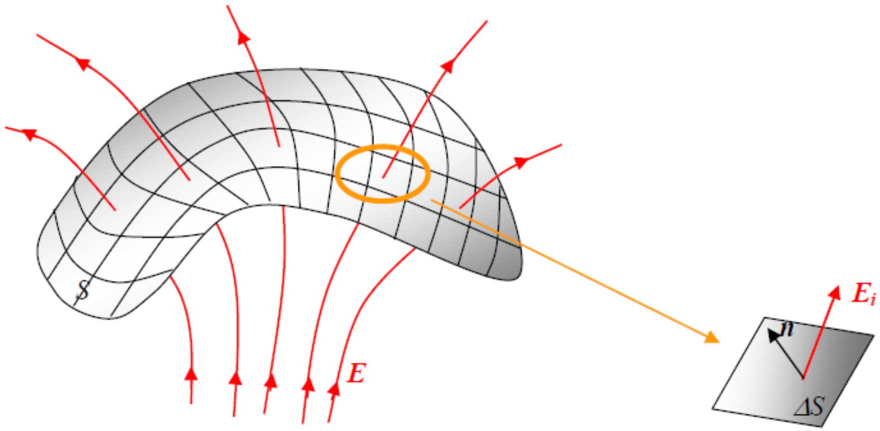


Se definiamo il vettore S come il valore della superficie S moltiplicato per il versore Normale ad essa possiamo scrivere che:

$$\boxed{\Phi_E = ES\cos\theta = \bar{E} \cdot \bar{S}}$$

Il flusso del campo elettrico

Nel caso in cui il campo elettrico non sia costante e la superficie non sia piana immaginiamo di suddividere la superficie in elementi piani infinitesimi attraversati da un campo costante e integriamo su tutta la superficie.



Otteniamo così il flusso totale del campo elettrico attraverso la superficie S:

$$\boxed{\Phi_E = \lim_{\Delta S \to 0} \sum \Delta\Phi_{E,i} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

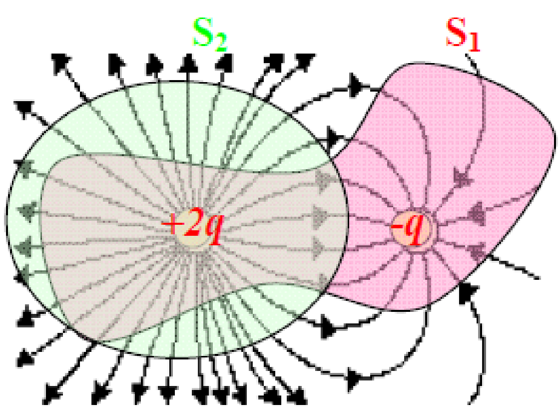
Il teorema di Gauss

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende solo dalle cariche interne alla superficie ed è pari a $q_{int}/\ \varepsilon_0$.

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma(V)} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = \frac{1}{\epsilon_0}\overbrace{\int_V \rho(\vec{x})\,d^3x}^{q_{int}}$$

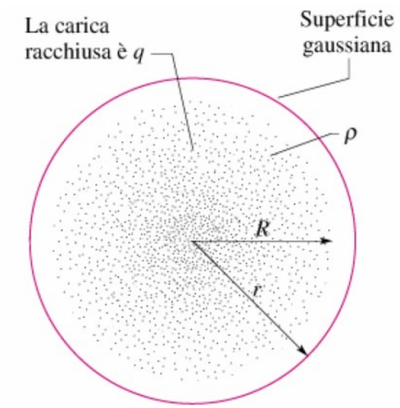
ESEMPIO



$$\Rightarrow \oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{2q - q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

Campo elettrostatico generato da una sfera uniformemente carica



Prendiamo una sfera di raggio R con carica q = ρV (dove ρ = densità di volume di carica).
Vogliamo calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.

Il campo, per questioni di simmetria, deve essere radiale.
Consideriamo ora una superficie sferica chiusa di raggio r concentrica con la prima.

Applichiamo il teorema di Gauss ed esaminiamo le possibilità al variare di r

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2$$

- r > R la carica q è tutta contenuta nella superficie sferica di raggio r
- r < R solo parte della carica q è contenuta nella superficie di raggio r

Caso r > R

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

In questo caso è come se la carica si trovasse tutta concentrata al centro della sfera.

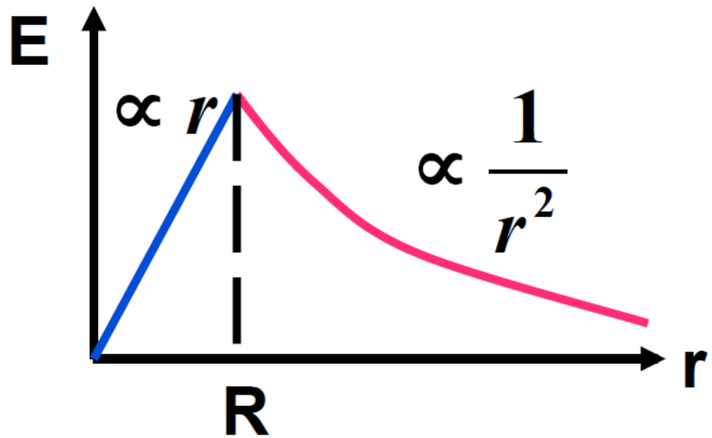
Caso r < R

Se la carica è distribuita uniformemente in tutto il volume della sfera q' è la carica contenuta all'interno della superficie sferica di raggio r e vale:

$$q' = \varrho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \Phi(E) = E\,4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$

Il campo cresce linearmente

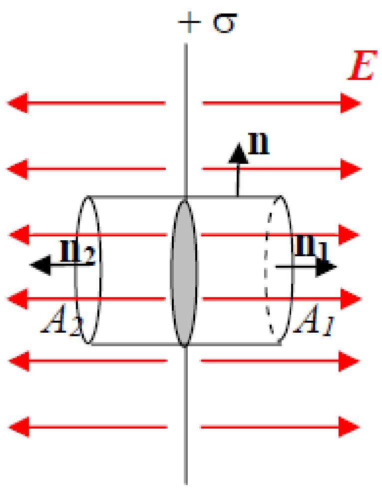


Caso r = R

In questo caso la funzione non è continua ma può essere prolungata per continuità perché Il limite destro e sinistro in prossimità di R sono uguali e hanno il valore:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{dove} \quad \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Campo elettrostatico generato da un piano indefinito uniformemente carico



La carica è distribuita in maniera uniforme sul piano in modo che $Q = +\sigma A$ (σ = densità superficiale di carica).

Vogliamo calcolare il valore del campo elettrico in tutto lo spazio.

Se dividiamo lo spazio omogeneo ed isotropo con un piano verticale

- le linee di campo devono essere perpendicolari al piano carico
- nei punti ad uguale distanza, a destra e sinistra del piano, il campo deve avere lo stesso valore

Scegliamo come superficie chiusa per calcolare il flusso un cilindro retto di area di base A, con asse perpendicolare al piano e basi equidistanti dal piano.

$$\oint_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{A_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{sup.lat.} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{A_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Teorema di Gauss

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dS = E_1 \cos 0 dS = E_1 dS \Rightarrow \int_{A_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{A_1} E_1 dS = E_1 \int_{A_1} dS = E_1 A$$

$$\vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = E_2 \cos 0 dS = E_2 dS \Rightarrow \int_{A_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \int_{A_2} E_2 dS = E_2 \int_{A_2} dS = E_2 A$$

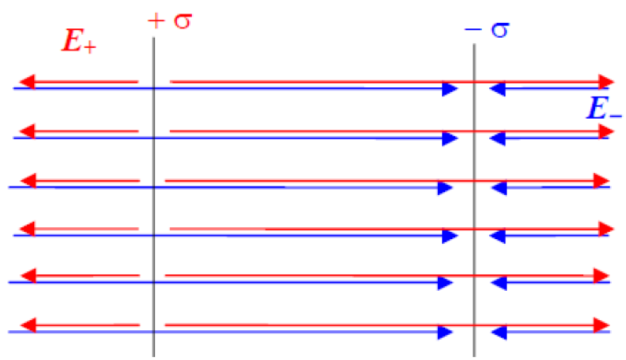
sulla supertficie laterale $\vec{E} \perp \vec{n} \Rightarrow \int_{sup.lat.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\oint_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1 A + E_2 A = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

(posto $E_1 = E_2 = E$) $2EA = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow$ $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Piani carichi paralleli

Calcolare il campo elettrico generato in tutto lo spazio da due piani indefiniti paralleli che hanno densità di carica superficiale $+\sigma$ e $-\sigma$ come in figura.

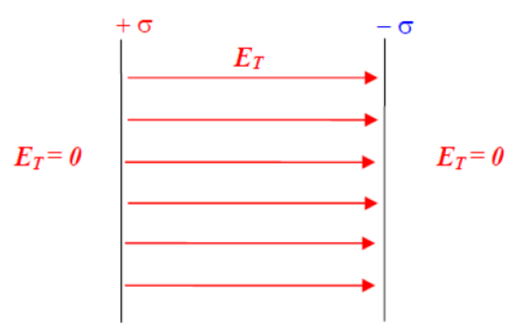


$$\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\text{con } \left|\vec{E}_+\right| = \left|\vec{E}_-\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$ $\qquad$ $\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \neq 0$ $\qquad$ $\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$

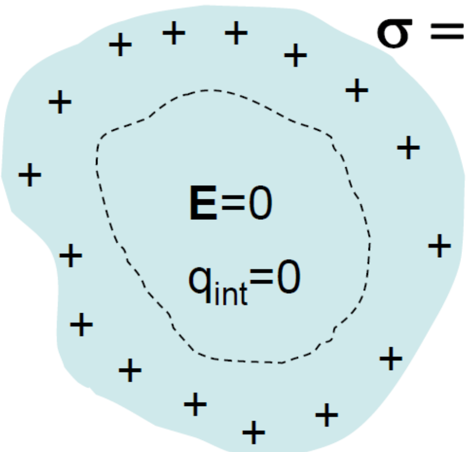
Il campo risultante è non nullo solo nella regione compresa tra i due piani.



$$E_T = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Conduttore carico

Università degli Studi di Padova



$$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$$

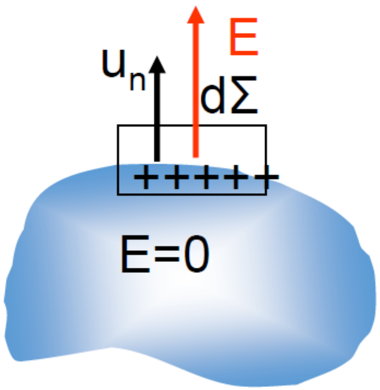
Quando un conduttore solido (metallo) è in equilibrio (cariche ferme) **il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo** $\boxed{\mathbf{E}_{int} = 0}$

- $\mathbf{\Phi(E) = 0}$ attraverso qualsiasi superficie interna al conduttore
- Un eccesso di carica può stare **solo sulla superficie** (Teor. Di Gauss)
- Il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto del conduttore
- La superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale

$$\boxed{V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0}$$

- Il campo elettrostatico **E** in un punto esterno, molto vicino al conduttore è <u>ortogonale alla superficie del conduttore</u>

Conduttore carico

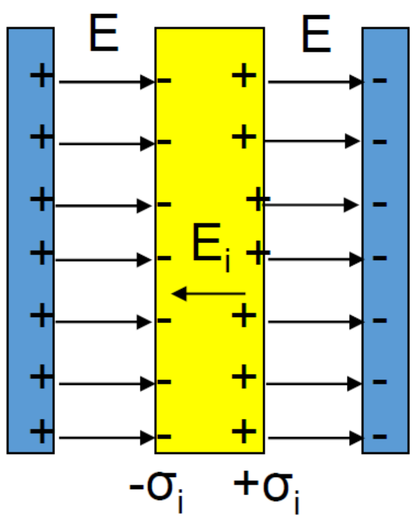


$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_n d\Sigma = E\, d\Sigma = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, d\Sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{u_n}$$

Teorema di Coulomb

Campo elettrostatico immediatamente all'esterno del conduttore



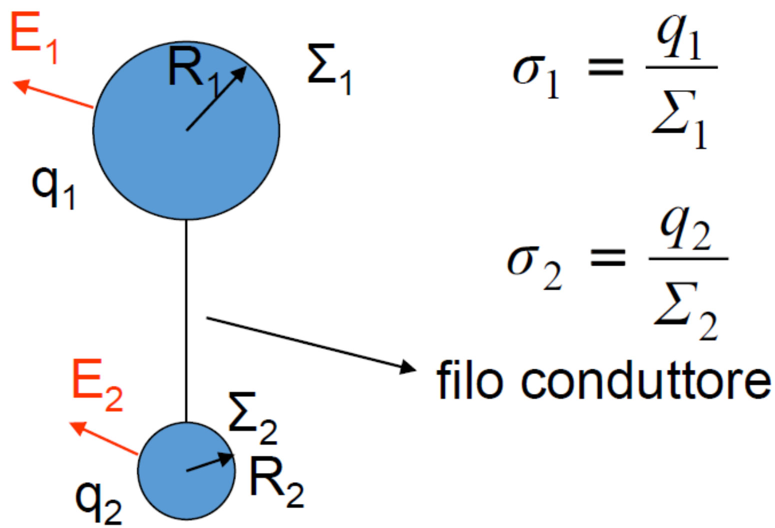
Se un conduttore è immerso in un campo elettrico **E** esterno, viene indotto all'interno del conduttore un campo elettrico $\mathbf{E_i = -E}$

sulle facce del conduttore compare una densità di carica $\sigma = \varepsilon_0 E$

Se due o più conduttori si mettono in contatto, si costituisce un unico corpo conduttore e allora sono tutti e due allo stesso potenziale

Distribuzione della carica

Università degli Studi di Padova



$$\sigma_1 = \frac{q_1}{\Sigma_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{\Sigma_2}$$

Le due sfere costituiscono un unico corpo conduttore

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\boxed{q = q_1 + q_2}$$

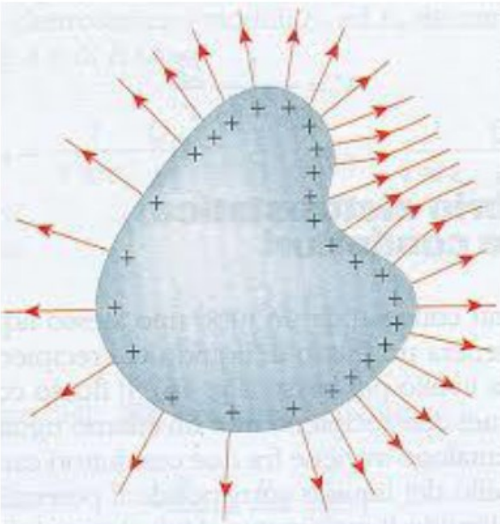
$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \Rightarrow \sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}$$

$$q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \Rightarrow \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{E_1}{E_2}$$

Il campo elettrico è maggiore dove è minore il raggio di curvatura

Potere disperdente delle punte



La carica si accumula sulle punte

Parafulmini