Esercizi visti il 12 dicembre

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 9.2] Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+2x}{\cos(y)} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

Svolgimento. In maniera formale abbiamo che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x}{\cos(y)}$$

ovvero

$$\cos(y)dy = (1+2x)dx$$

integrando otteniamo

$$\int_{\pi}^{y} \cos(s)ds = \int_{0}^{x} (1+2t)dt$$

e quindi

$$[\sin(s)]_{\pi}^{y} = [t+t^2]_0^x$$

cioè

$$\sin(y) = x + x^2$$

per gli archi associati segue che

$$\sin(\pi - y) = x^2 + x$$

dunque

$$y = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Questa funzione è definita in un intorno di 0 se e solo se $-1 \leq x + x^2 \leq 1$. Abbiamo che $x + x^2 \geq -1$ è sempre verificata mentre $x + x^2 \leq 1$ è verificata se e solo se

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Quindi la soluzione massimale è data da $y(x) = \pi - \arcsin(x+x^2)$ sull'intervallo $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. "Giusto per scrupolo" osserviamo che $y(0) = \pi - \arcsin(0) = \pi$ e che

$$\frac{1+2x}{\cos(y(x))} = \frac{1+2x}{\cos(\pi - \arcsin(x+x^2))} = \frac{1+2x}{-\cos(\arcsin(x+x^2))} = \frac{1+2x}{-\sqrt{1-\sin(\arcsin(x+x^2))^2}} =$$

$$= -\frac{1+2x}{\sqrt{1-(x+x^2)^2}} = \frac{d}{dx}(\pi - \arcsin(x+x^2)).$$

Questo tipo di conti "per scrupolo" non è necessario ma a volte può essere utile farli per cercare eventuali errori. □

Esercizio 2. [1, Esercizio 9.3] Calcolare la soluzione dei seguenti Problemi di Cauchy.

1.

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{1+e^x} + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y' = y^2 \ln(x+3) \\ y(-2) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Svolgimento. 1. L'equazione è lineare ovvero è del tipo $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$. In questo caso abbiamo

$$a(x) = -\frac{1}{1+e^x}, \quad b(x) = e^{-x}.$$

la soluzione è quindi data da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_0^x b(s) e^{A(s)} ds \right)$$

dove

$$A(s) = \int_0^s a(t)dt.$$

Quindi abbiamo

$$A(s) = \int_0^s -\frac{1}{1+e^t} dt = -\int_0^s \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t} dt = -\int_0^s dt + \int_0^s \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

cambiamo la variabile $1 + e^t \to u (\Rightarrow e^t dt = du)$.

$$A(s) = -s + \int_2^{1+e^s} \frac{1}{u} du = -s + \ln(1+e^s) - \ln(2).$$

Abbiamo invece che

$$\int_0^x b(s)e^{A(s)} ds = \int_0^x e^{-s} e^{-s+\ln(1+e^s)-\ln(2)} ds = \int_0^x e^{-2s} e^{\ln(1+e^s)} e^{-\ln(2)} ds = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-2s}(1+e^s) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x (e^{-2s}+e^{-s}) ds = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2s} \right]_0^x + \frac{1}{2} [-e^{-s}]_0^x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

Quindi

$$e^{-A(x)} \left(\int_0^x b(s) e^{A(s)} ds \right) = e^{x-\ln(1+e^x)+\ln(2)} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right)$$

ovvero

$$y(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) = \frac{e^x}{1+e^x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right).$$

In particolare y è definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. L'equazione è a variabili separabili: procedendo in maniera formale abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \ln(x+3)$$

ovvero

$$\frac{dy}{y^2} = \ln(x+3) dx$$

e quindi

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{y} \frac{ds}{s^2} = \int_{-2}^{x} \ln(t+3)dt$$

ovvero

$$\left[-\frac{1}{s}\right]_{-\frac{1}{2}}^{y} = \int_{1}^{x+3} \ln(r)dr$$

i.e.

$$-2 - \frac{1}{y} = [r\ln(r)]_1^{x+3} - \int_1^{x+3} dr$$

cioè

$$-2 - \frac{1}{y} = (x+3)\ln(x+3) - (x+3-1)$$

ovvero

$$-\frac{1}{y} = (x+3)\ln(x+3) - x$$

e infine

$$y = \frac{1}{x-(x+3)\ln(x+3)}$$

Vediamo su quale intervallo la soluzione è definita. Necessariamente abbiamo bisogno che $x > -3$. Vediamo che ciò è sufficiente. Sia $f(x) = x - (x+3)\ln(x+3)$. Vediamo che per $x > -3$ f non si annulla mai. Studiamo la derivata: $f'(x) = 1 - (x+3)\frac{1}{x+3} + \ln(x+3) = \ln(x+3)$. Quindi f' si annulla in -2, è positiva per $x > -2$ e negativa per $-3 < x < -2$. In altre parole -2 è un massimo per f. Ma $f(-2) = -2 < 0$ quindi f non si annulla mai. In definitiva la soluzione massimale y è definita sull'intervallo $(-3, +\infty)$.

$\square$

Esercizio 3. [1, Esercizio 9.4] Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x+y+3) \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Svolgimento. Definiamo $y_1(x) = y(x) + x + 3$. Abbiamo quindi che $\sin(x+y+3) = \sin(y_1)$, $y_1(0) = y(0) + 0 + 3 = 0$, $y_1'(x) = y'(x) + 1$ e quindi il Problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} y_1' = \sin(y_1) + 1 \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili: procedendo in maniera formale abbiamo

$$\frac{dy_1}{dx} = \sin(y_1) + 1$$

ovvero

$$dx = \frac{dy_1}{\sin(y_1) + 1}$$

e quindi integrando

$$\int_0^x dt = \int_0^{y_1} \frac{ds}{\sin(s)+1}$$

Concentriamoci sul lato di destra e abbiamo

$$\int_0^{y_1} \frac{ds}{\sin(s)+1} = \int_0^{y_1} \frac{ds}{\sin(s)+1} \frac{1-\sin(s)}{1-\sin(s)} = \int_0^{y_1} \frac{1-\sin(s)}{1-\sin^2(s)} ds = \int_0^{y_1} \frac{1-\sin(s)}{\cos^2(s)} ds =$$

$$= \int_0^{y_1} \frac{ds}{\cos^2(s)} - \int_0^{y_1} \frac{\sin(s)}{\cos^2(s)} ds$$

Per il primo integrale sostituiamo $u = \tan(s)$ quindi $du = \frac{ds}{\cos^2(s)}$; per il secondo sosituiamo $v = \cos(x)$ quindi $dv = -\sin(s)ds$. Quindi abbiamo

$$\int_0^{\tan(y_1)} du + \int_1^{\cos(y_1)} \frac{dv}{v^2} = [u]_0^{\tan(y_1)} - \left[\frac{1}{v}\right]_1^{\cos(y_1)} = \tan(y_1) - \frac{1}{\cos(y_1)} + 1$$

Quindi

$$x = \tan(y_1) - \frac{1}{\cos(y_1)} + 1$$

e ricordando $y_1 = y + x + 3$ abbiamo la soluzione implicita.

$$x = \tan(y + x + 3) - \frac{1}{\cos(y + x + 3)} + 1$$

□

Esercizio 4. [1, Esercizio 9.5] Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 - \cos(y))y' = x \sin(x) \sin(y)$$

1. Determinare tutte le soluzioni costanti;
2. Calcolare (in forma implicita) l'integrale generale;
3. Calcolare la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(0) = \frac{5}{2}\pi$.

Svolgimento. 1. Prendiamo la soluzione costante $y(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$: sostituendo nell'equazione otteniamo

$$0 = x \sin(x) \sin(c)$$

Osserviamo ora che $\sin(c) \neq 0$ allora dovremmo richiedere che l'equazione $x \sin(x) = 0$ sia vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma ciò è falso. Se invece $\sin(c) = 0$ allora l'equazione è risolta quindi le soluzioni costanti dell'equazione sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(x) = k\pi, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

2. L'equazione è a variabili separiabili: abbiamo

$$y' = (x \sin(x)) \left(\frac{\sin(y)}{1 - \cos(y)} \right)$$

procedendo in maniera formale abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = (x \sin(x)) \left(\frac{\sin(y)}{1 - \cos(y)} \right)$$

e quindi

$$\frac{1 - \cos(y)}{\sin(y)} dy = x \sin(x) dx$$

integrando

$$\int \frac{1 - \cos(y)}{\sin(y)} dy = \int x \sin(x) dx$$

Concentriamoci sul primo integrale:

$$\int \frac{1-\cos(y)}{\sin(y)}dy = \int \frac{1}{\sin(y)}dy - \int \frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy = \int \frac{\sin(y)}{\sin^2(y)}dy - \int \frac{du}{u}$$

dove abbiamo fatto il cambio di variabile $u = \sin(y)$. Ora abbiamo

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\sin(y)|$$

$$\int \frac{\sin(y)}{\sin^2(y)}dy = \int \frac{\sin(y)}{1-\cos^2(y)}dy = -\int \frac{v}{1-v^2}dv$$

dove abbiamo fatto il cambio di variabile $v = \cos(x)$. Abbiamo ora

$$\frac{v}{1-v^2} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v} = \frac{A(1+v)+B(1-v)}{1-v^2} = \frac{(A+B)+(A-B)v}{1-v^2}$$

da cui $A = B = \frac{1}{2}$. Quindi

$$-\int \frac{v}{1-v^2}dv = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+v}dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-v}dv = -\frac{1}{2}\ln|1+v| - \frac{1}{2}\ln|1-v|$$

In definitiva per il lato sinistro dell'equazione otteniamo

$$-\frac{1}{2}\ln|1+\cos(y)| - \frac{1}{2}\ln|1-\cos(y)| - \ln|\sin(y)|$$

Per il lato destro dell'equazione integriamo per parti

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x)$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$\sin(x) - x\cos(x) + \frac{1}{2}\ln|1+\cos(y)| + \frac{1}{2}\ln|1-\cos(y)| + \ln|\sin(y)| = c$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

3. Usiamo ora l'informazione $y(0) = \frac{5}{2}\pi$. Sostituiamo nell'integrale generale e otteniamo

$$\sin(0) - 0\cos(0) + \frac{1}{2}\ln|1+\cos(\tfrac{5}{2}\pi)| + \frac{1}{2}\ln|1-\cos(\tfrac{5}{2}\pi)| + \ln|\sin(\tfrac{5}{2}\pi)| = c$$

da cui $c = 0$.

□

Esercizio 5. [1, Esercizio 9.8] Calcolare la soluzione $y \in C^1(a,b)$, $-\infty \leq a < 1 < b \leq \infty$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-x}{y+x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e disegnare un grafico qualitativo di y. Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$.

Svolgimento. Procediamo in maniera formale: facciamo la sostituzione $y_1(x) = \frac{y(x)}{x}$ ($\Rightarrow y(x) = y_1(x)x$). Abbiamo che $y'(x) = y_1'(x)x + y_1(x)$. Quindi il Problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} y_1'(x)x + y_1(x) = \frac{y_1(x)x-x}{y_1(x)x+x}, \\ y_1(1) = 0. \end{cases}$$

Quindi l'equazione differenziale diventa

$$y_1'x + y_1 = \frac{y_1 - 1}{y_1 + 1}$$

ovvero

$$y_1' = \left(\frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - y_1\right)\frac{1}{x}$$

L'equazione è a variabili separabili quindi abbiamo

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(\frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - y_1\right)\frac{1}{x}$$

e

$$dy_1\left(\frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - y_1\right)^{-1} = \frac{dx}{x}$$

cioè

$$-\frac{1 + y_1}{1 + y_1^2}dy_1 = \frac{dx}{x}$$

e integrando abbiamo

$$-\int_0^{y_1} \frac{1+t}{1+t^2}dt = \int_1^x \frac{ds}{s}$$

Concentriamoci sul primo integrale:

$$-\int_0^{y_1} \frac{1+t}{1+t^2}dt = -\int_0^{y_1} \frac{1}{1+t^2} - \int_0^{y_1} \frac{t}{1+t^2}dt = -\frac{1}{2}[\ln|1+t^2|]_0^{y_1} - [\arctan(t)]_0^{y_1} = -\frac{1}{2}\ln|1+y_1^2| - \arctan(y_1)$$

il secondo integrale ci dà invece

$$\int_1^x \frac{ds}{s} = [\ln(s)]_1^x = \ln|x|$$

quindi la soluzione è data da

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1 + y_1^2| - \arctan(y_1)$$

e ricordando che $y_1 = y/x$ otteniamo

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ma

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right| = -\frac{1}{2}\left(\ln|x^2 + y^2| - \ln|x^2|\right) = -\frac{1}{2}\ln|x^2 + y^2| + \ln|x|$$

quindi l'equazione diventa

$$0 = -\frac{1}{2}\ln|x^2 + y^2| - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Notiamo che però qui abbiamo un problema lungo l'asse delle y ovvero su $\{x = 0\}$ dovuto prevalentemente alla sostituzione che abbiamo fatto all'inizio $y_1 = y/x$. Notare che passando in cordinate polari otteniamo un'espressione più semplice: facciamo la sostituzione $y = r\sin(\theta)$, $x = r\cos(\theta)$. Ma ci restringiamo solo all'intervallo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ perchè lì abbiamo che $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$ e lì non si annulla $x = r\cos(\theta)$. Otteniamo

$$0 = -\frac{1}{2}\ln|r^2| - \arctan(\tan(\theta))$$

ovvero

$$\ln(r) = -\theta$$

e quindi

$$r = e^{-\theta}$$

per $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$: ovvero ci fermiamo all'asse delle y come osservato prima. Osserviamo ora che forse ci sarebbe convenuto passare prima in coordinate polari: facciamo il cambio di coordinate $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Abbiamo, procedendo in maniera formale, che

$$dy(y + x) = dx(y - x)$$

e che

$$\begin{cases} dx = \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta \\ dy = \sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione otteniamo

$$[\sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta][r\sin(\theta) + r\cos(\theta)] = [\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta][r\sin(\theta) - r\cos(\theta)]$$

svolgendo un po'di conti otteniamo

$$\sin^2(\theta)dr + r\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)dr + r\cos^2(\theta)d\theta =$$

$$= \sin(\theta)\cos(\theta)dr - r\sin^2(\theta)d\theta - \cos^2(\theta)dr + r\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta.$$

ovvero

$$\sin^2(\theta)dr + r\cos^2(\theta)d\theta = -r\sin^2(\theta)d\theta - \cos^2(\theta)dr.$$

cioè

$$dr + rd\theta = 0$$

i.e.

$$\frac{dr}{d\theta} = -r$$

ovvero

$$r' = -r$$

che ha per soluzione

$$r(\theta) = Ce^{-\theta}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Usiamo la condizione $y(1) = 0$ per calcolare C: ciò equivale a dire che la curva tracciata da $r(\theta) = Ce^{-\theta}$ deve passare per il punto $(1, 0)$. In altre parole l'equazione deve essere verificata quando $r = 1$ e $\theta = 0$. Richiediamo quindi

$$1 = Ce^{-0}$$

da cui $C = 1$. Vediamo quindi di far "tornare" alle coordinate cartesiane la curva in polari

$$r(\theta) = e^{-\theta}$$

Disegnamo la curva:

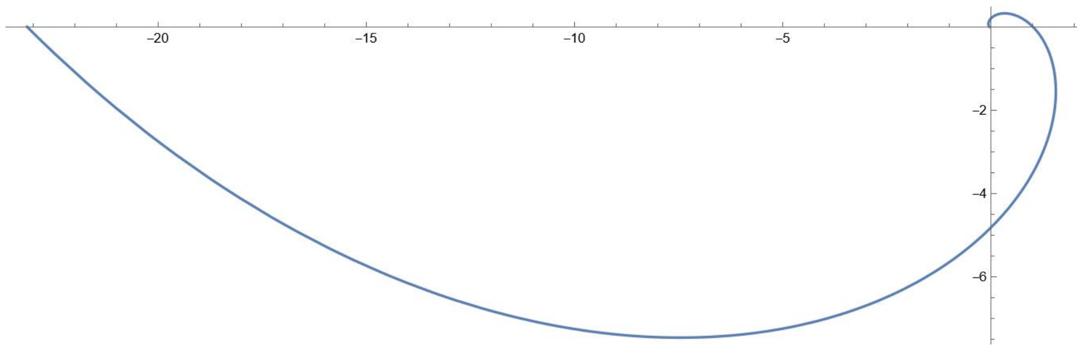

Figura 1: Grafico di $r(\theta) = e^{-\theta}$ per $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

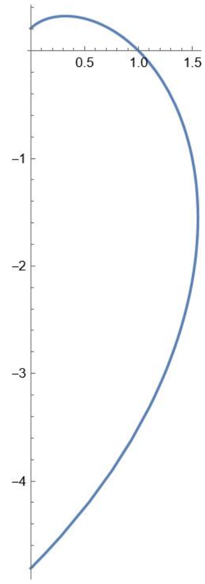

Figura 2: Grafico di $r(\theta) = e^{-\theta}$ per $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Ora vogliamo scriverla, in un intorno del punto $(x, y) = (1, 0)$ come funzione del tipo $(x, y(x))$. Possiamo farlo, per il teorema delle funzioni implicite (o teorema di Dini), finche non incontriamo una derivata parallela all'asse delle y[1]. Calcoliamo la derivata: abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{d\theta} r(\theta)\sin(\theta)}{\frac{d}{d\theta} r(\theta)\cos(\theta)} = \frac{-\sin(\theta) + \cos(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$$

Abbiamo che c'è una derivata verticale ogni volta che il denominatore si annulla cioè ogni volta che $\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0$. Visto che per $\theta = 0$ abbiamo il punto di partenzia siamo interessati agli angoli più vicini a 0 $\theta_1 \leq 0 \leq \theta_2$ per cui si verifichi questa condizione. É facile vedere che $\theta_1 = -\pi/4$, $\theta_2 = 3\pi/4$. Vogliamo quindi capire "che coordinate cartesiane ha" questa curva

[1] Graficamente questo vuol dire che ci restringiamo ad un intervallo per cui tracciando rette parallele all'asse delle y incrociamo il grafico esattamente una volta sola.

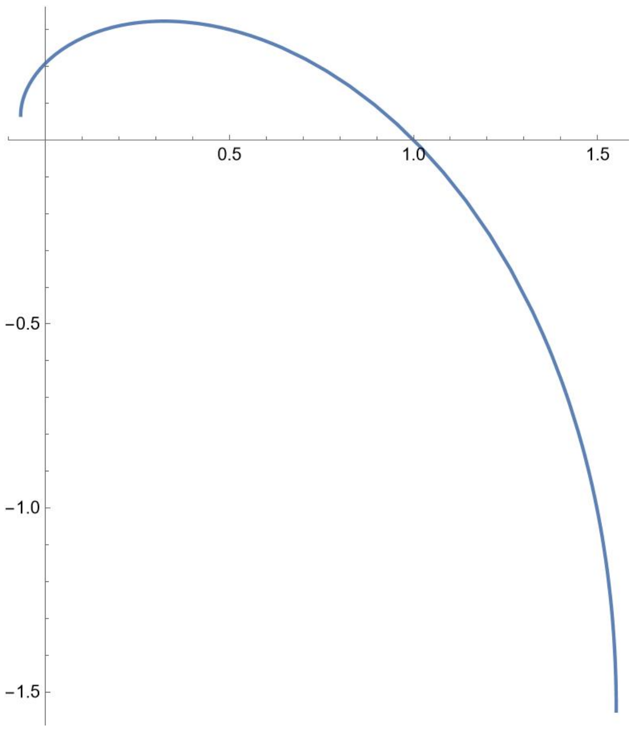

Figura 3: Grafico di $r(\theta) = e^{-\theta}$ per $-\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$.

Con un po' di trigonometria otteniamo che

$$a = -\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf`

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf`