

# CORSO DI TECNICA DELLE COSTRUZIONI

## IL CALCESTRUZZO ARMATO:

### Il comportamento a taglio – SLU per taglio

*Prof. Carlo Pellegrino*

Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Ambientale ICEA,  
Università degli Studi di Padova



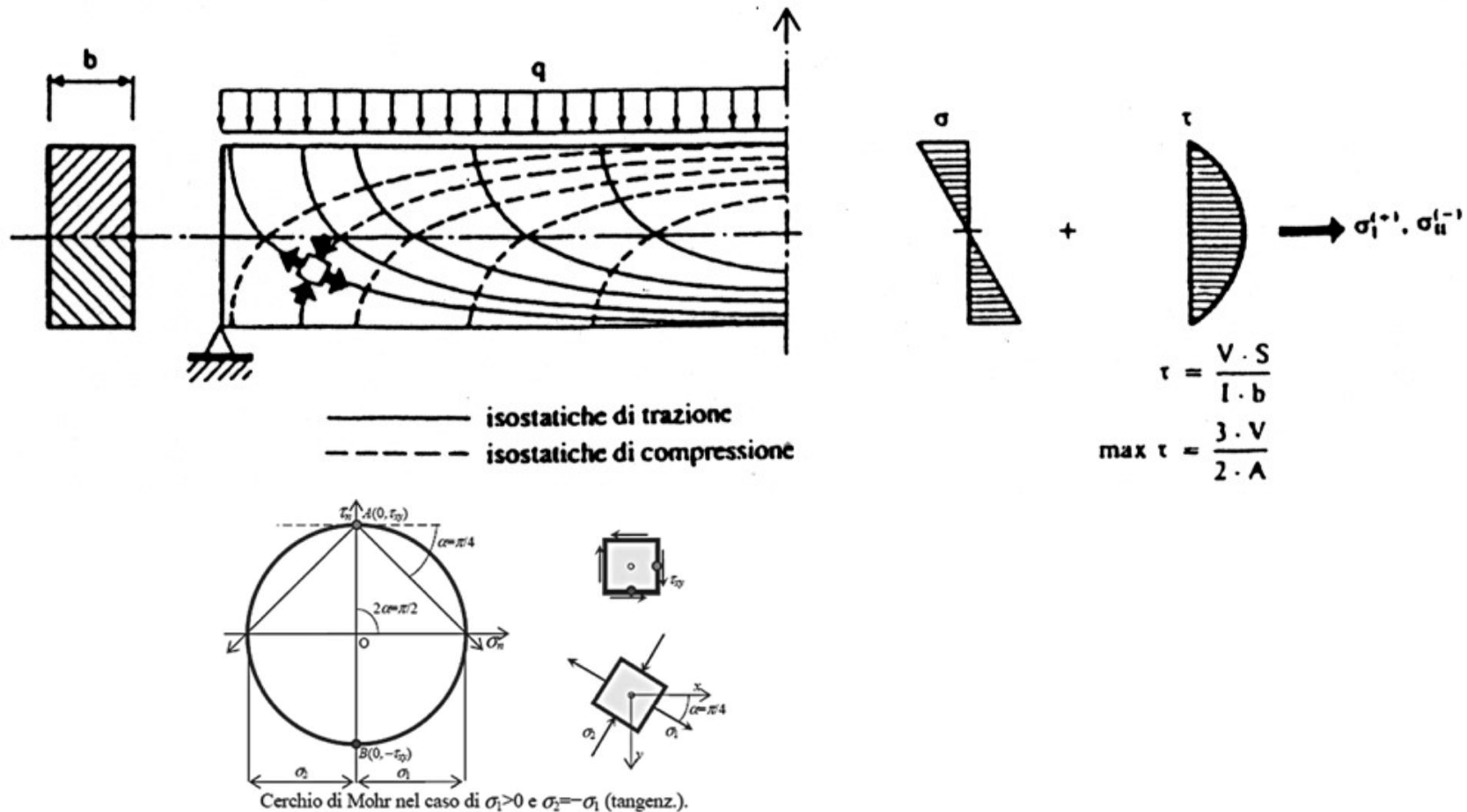
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio

**Stato I:** fase non fessurata

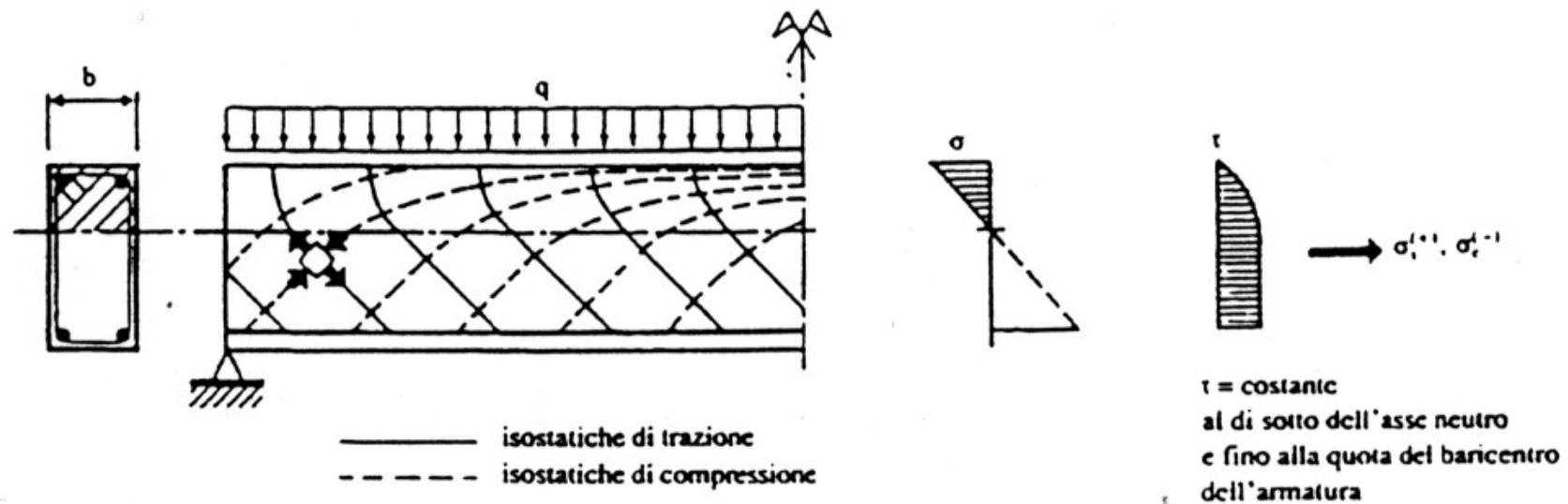
si forma un sistema di tensioni principali oblique di trazione e di compressione che, all'altezza dell'asse neutro, sono inclinate di  $45^\circ$  e  $135^\circ$  rispetto all'asse della trave.



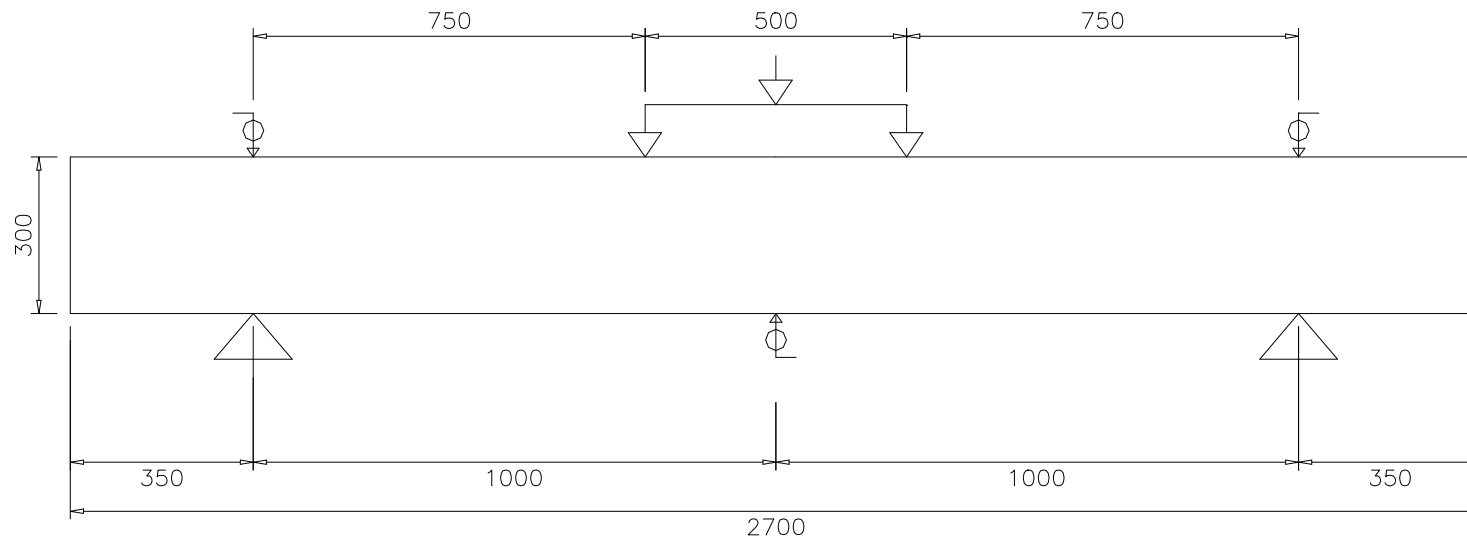
## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio

### Stato II: fase fessurata

Superamento della resistenza a trazione del calcestruzzo → fessure da taglio (diagonali).  
 Tale limite di resistenza si raggiunge nei tratti terminali (dove prevale la componente di taglio);  
 le fessure partono dal bordo inferiore e si estendono con traiettoria inclinata.  
 Ridistribuzione delle tensioni (taglio trasmesso attraverso vari e complessi fenomeni).

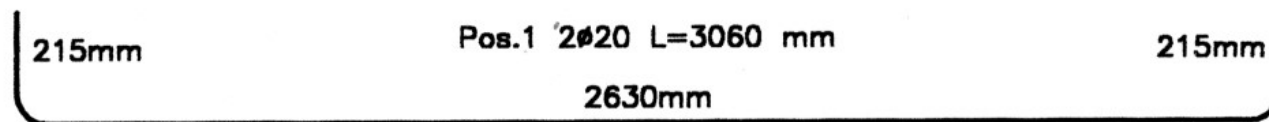
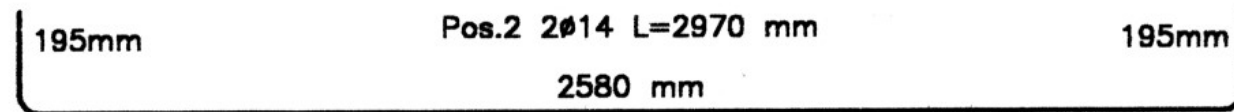
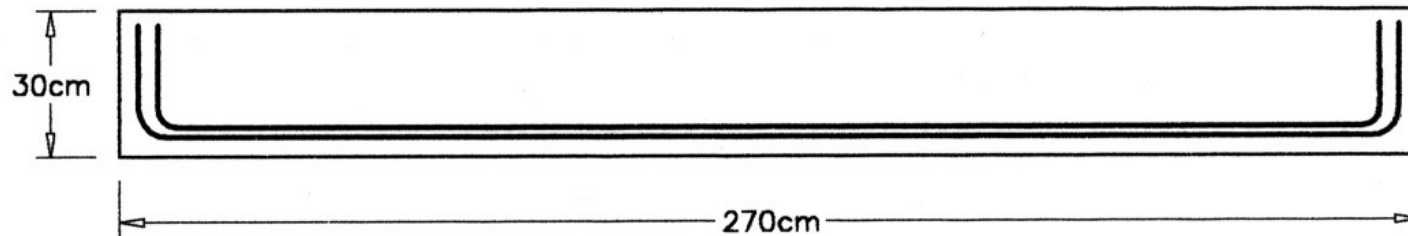


## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio

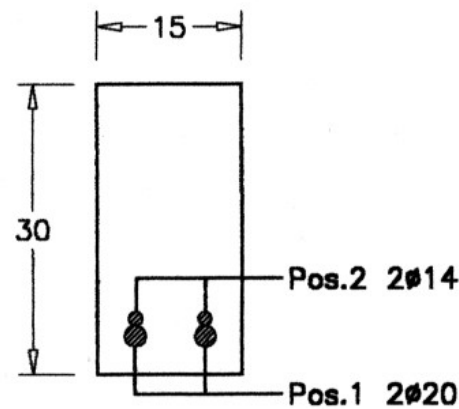


Sperimentazione - Schema statico

# IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio



Sezione trasversale  
scala 1:10



Armatura trave C1

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio

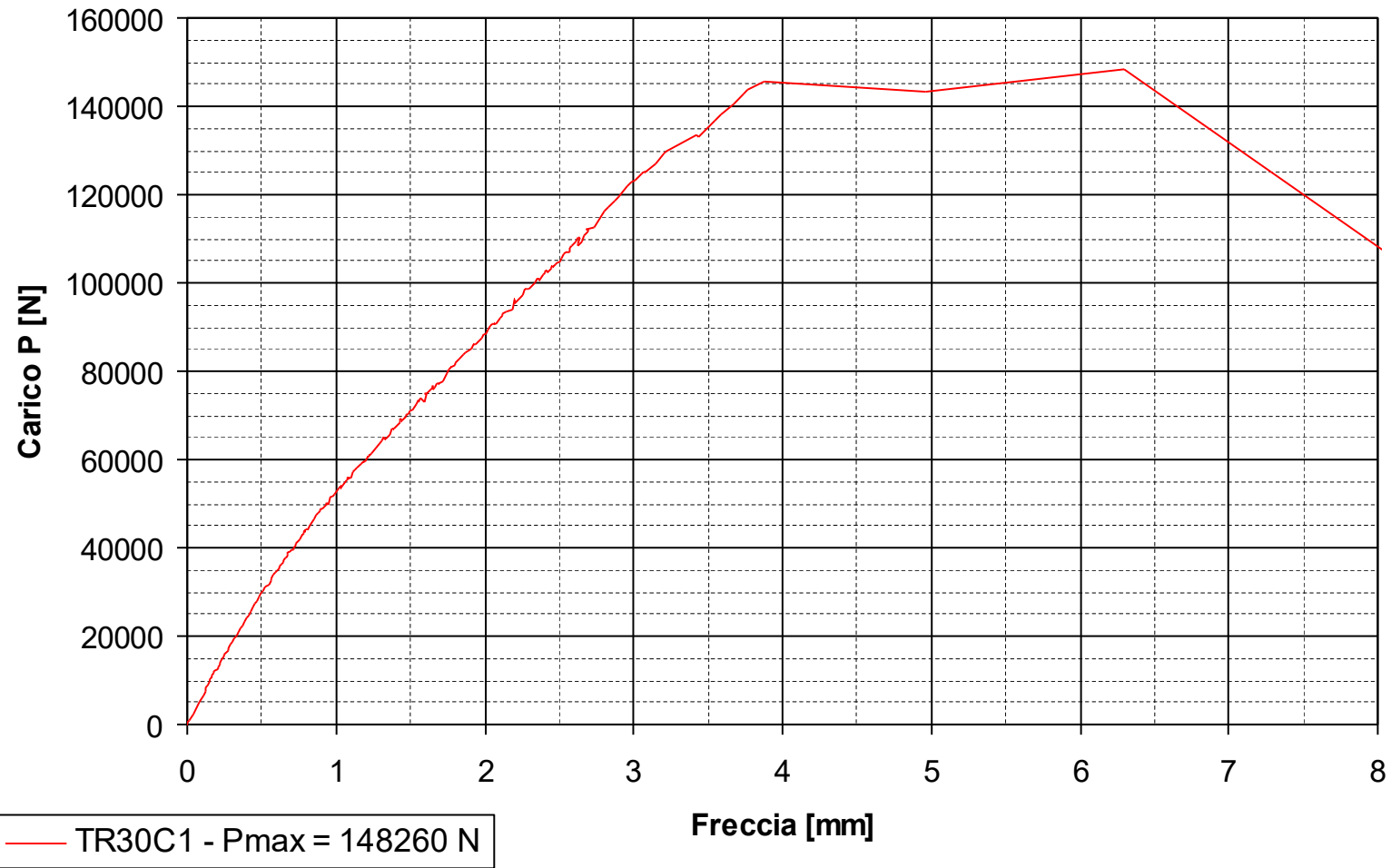
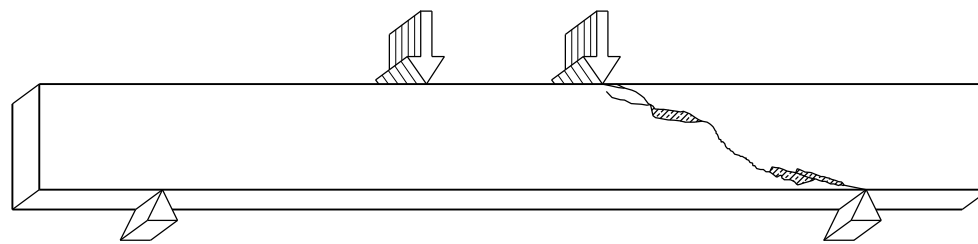
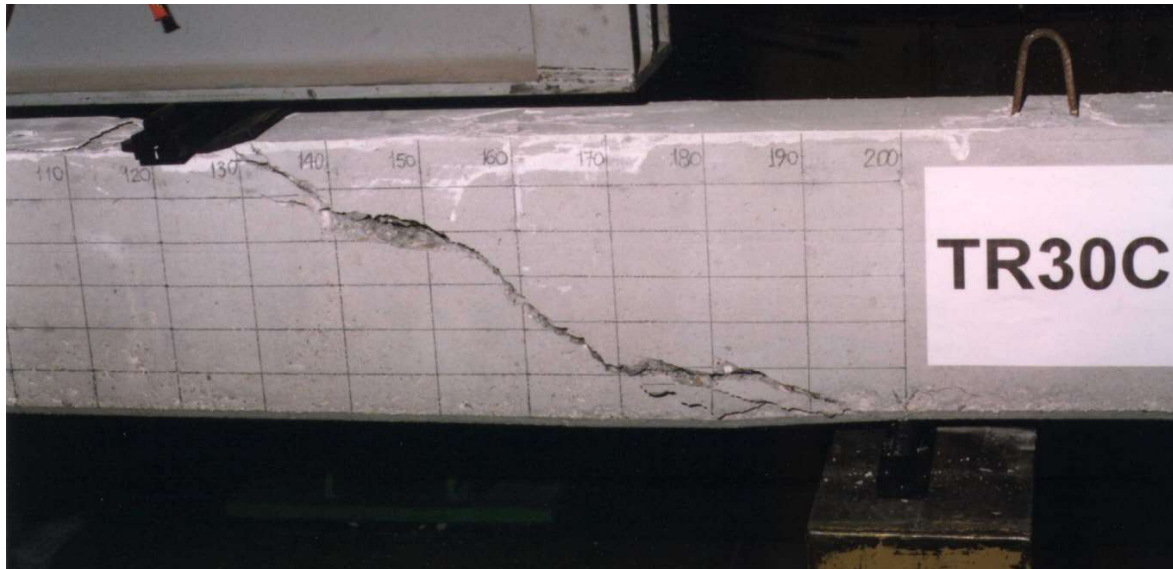



Diagramma carico spostamento trave C1

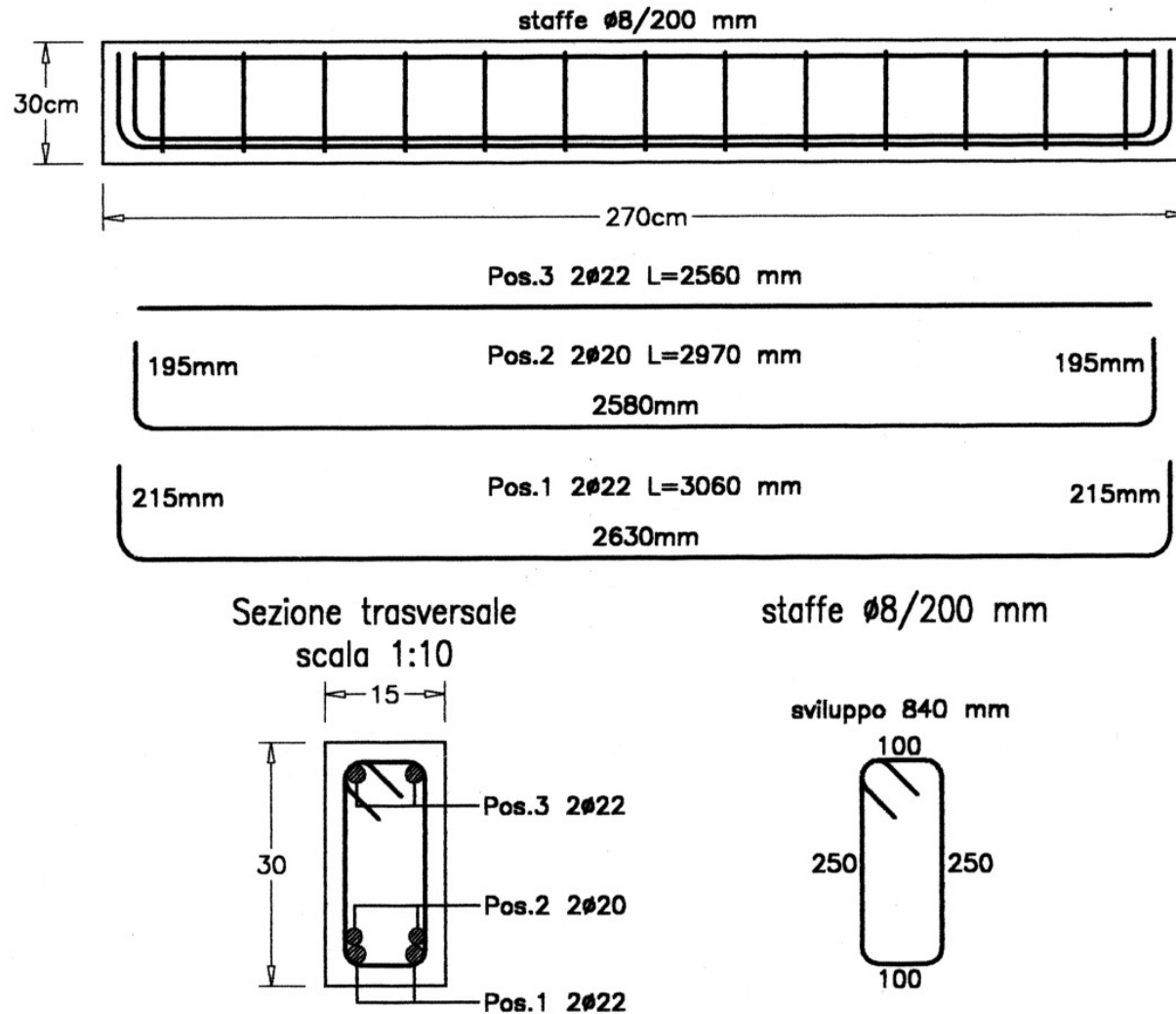
## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio



 distacco del copriferro

Quadro fessurativo trave C1

# IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio



Armatra trave D1



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio

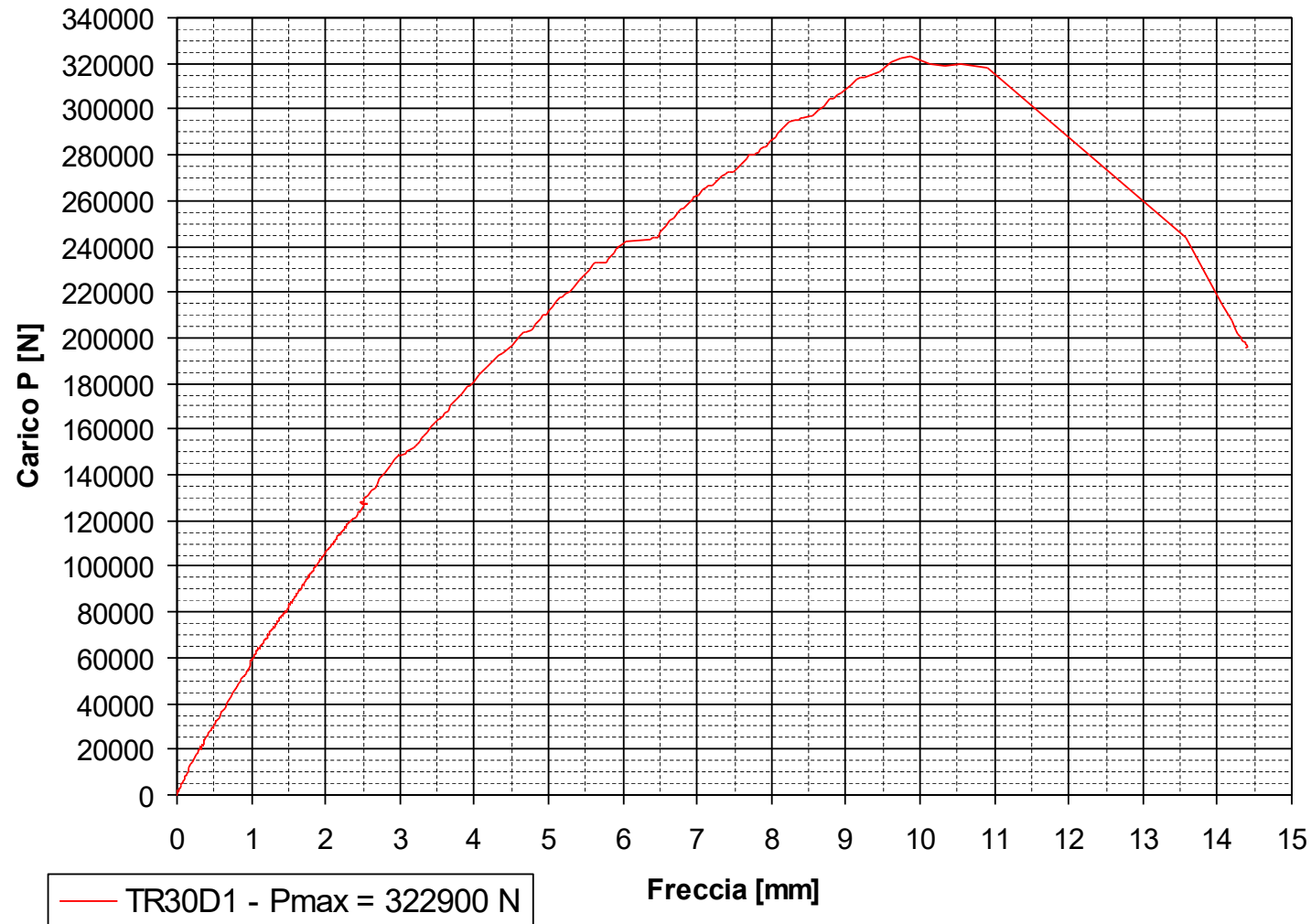
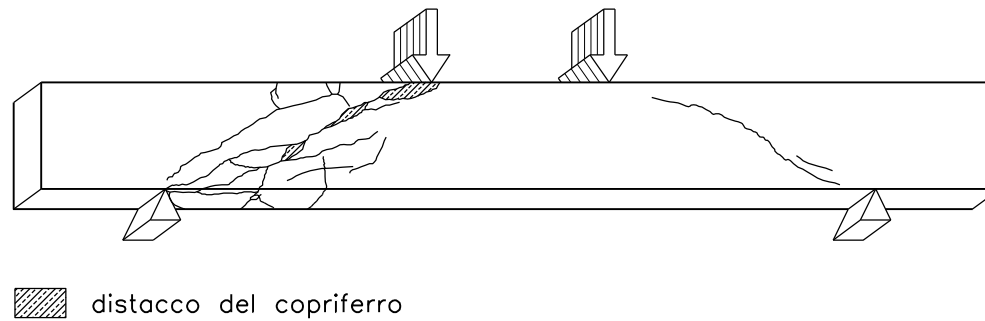


Diagramma carico spostamento trave D1

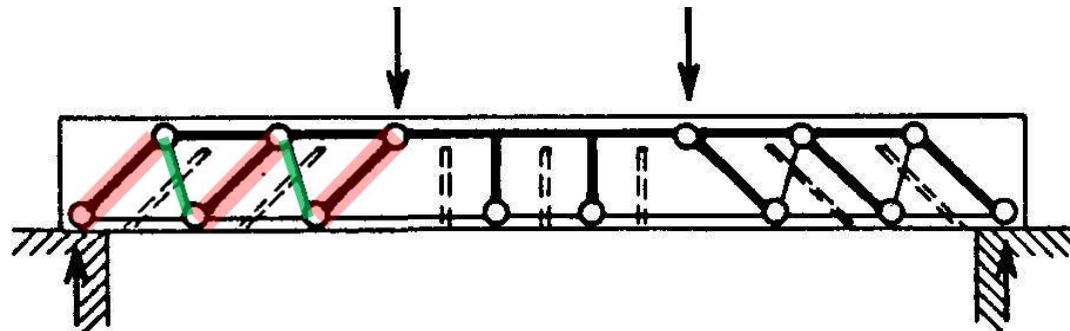
## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento sperimentale a taglio



Quadro fessurativo trave D1

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO



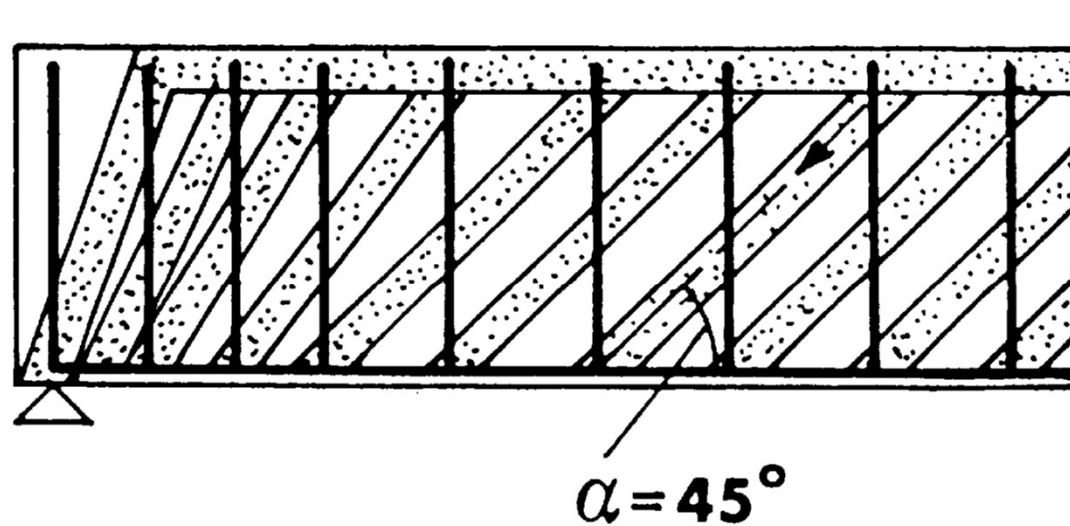
Traliccio di Ritter-Morsch

**Il modello a traliccio**, proposto nel 1902 da Ritter-Mörsch, considera aste inclinate incernierate ai nodi con correnti paralleli. In particolare le bielle (compresse) di conglomerato sono ipotizzate inclinate a  $45^\circ$ .

Osservazione: in assenza di bielle tese (ovvero staffe o ferri piegati) il traliccio sarebbe labile e quindi la resistenza a taglio nulla. Si è invece osservato sperimentalmente che la resistenza a taglio di travi prive di armatura trasversale non è nulla.

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO



Traliccio di Ritter-Morsch modificato

Il modello modificato si considera un inclinazione variabile delle bielle compresse.

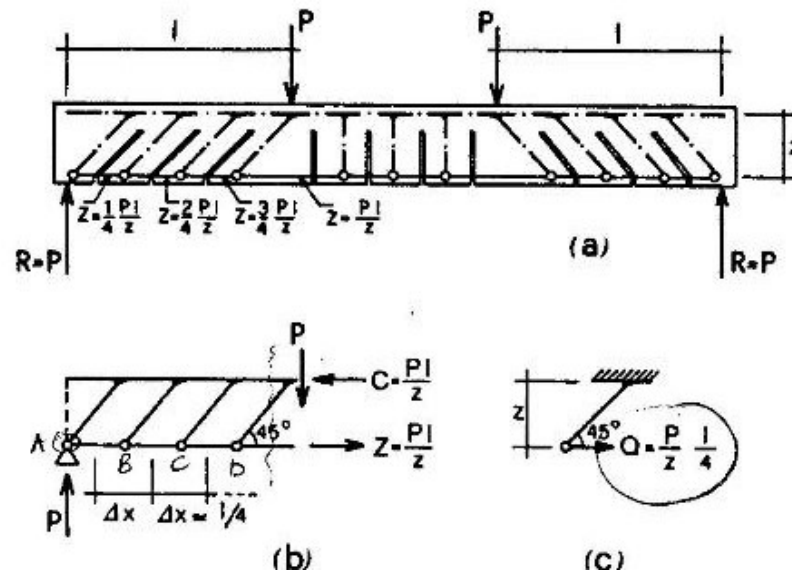
## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

# MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO

## Meccanismi Secondari

### *Effetto pettine:*

Nelle travi senza armatura a taglio in fase fessurata si hanno, tra le fessure oblique, le bielle di calcestruzzo si comportano come una mensola incastrata sul corrente compresso (e non incernierata come previsto dal modello di Ritter-Mörsch) e soggetta nel bordo inferiore ad uno sforzo di scorrimento (incremento dello sforzo di trazione nell'armatura longitudinale dovuto alla variazione di momento), che produce una sollecitazione di presso-flessione e taglio.



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO

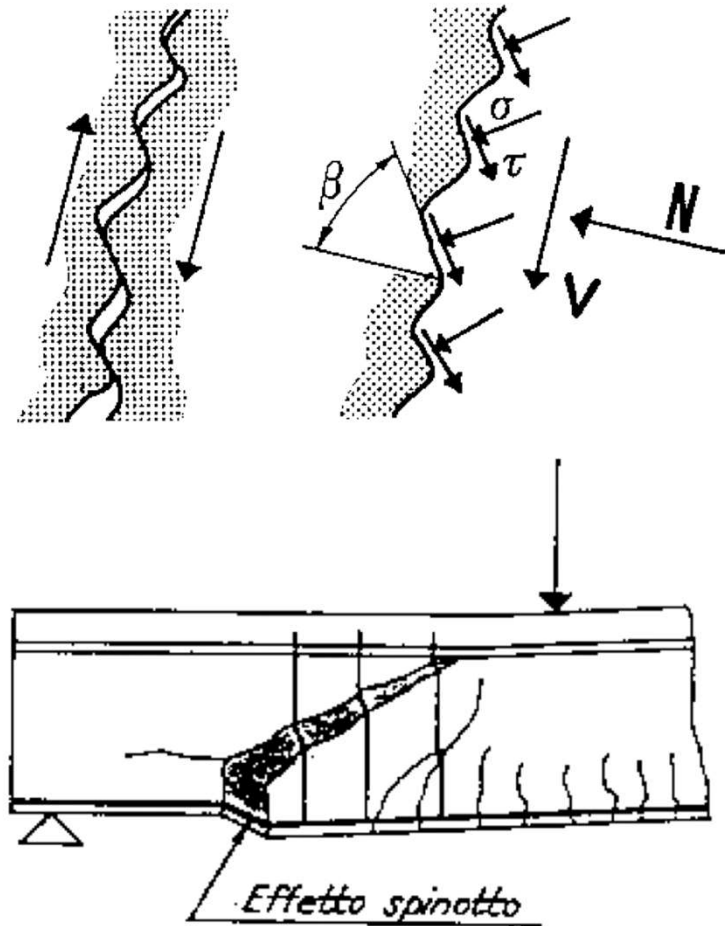
#### Meccanismi Secondari

*Effetto ingranamento degli inerti (aggregate interlock):*

Contributo resistente che tiene conto del fatto che le fessure presentano delle superfici molto irregolari e scabre, opponendosi allo scorrimento mutuo relativo, con una componente tangenziale. Tale effetto è trascurabile per travi alte e si annulla con l'aumentare dell'ampiezza delle fessure.

*Effetto bietta o spinotto (dowel-action):*

Contributo resistente offerto dalla rigidità flessionale dell'armatura longitudinale che attraversa la fessura, conseguente allo scorrimento delle facce della fessura, che nel caso di elevate quantità d'armatura longitudinale, può portare al distacco del copriferro in prossimità della fessura.



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO

#### Altri Meccanismi Secondari

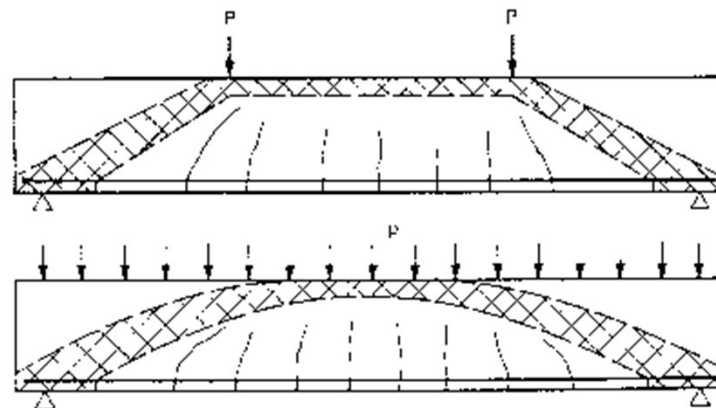
##### *Effetto di tension stiffening nel corrente teso del calcestruzzo:*

Contributo resistente che si aggiunge a quello dell'effetto biacca in quanto, nella zona tesa tra le fessure, l'armatura longitudinale è avvolta in gran parte da calcestruzzo ancora integro che sviluppa un'azione irrigidente non trascurabile soprattutto per zone tese molto estese.

##### *Effetto arco:*

Nel caso di carichi vicini all'appoggio, o travi alte il carico può essere trasmesso agli appoggi attraverso un comportamento ad arco.

In realtà questo non è un effettivo meccanismo di taglio, nel senso che non trasmette azioni tangenziali da una sezione all'altra, però il suo effetto riduce il contributo degli altri elementi resistenti.



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

# MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO

### Parametri che influenzano il comportamento a taglio

I principali parametri che influenzano il quadro fessurativo ed il comportamento a rottura sono i seguenti:

1. il rapporto luce di taglio-altezza utile ( $a/d$ );
2. la forma della sezione;
3. la percentuale di armatura longitudinale tesa;
4. la percentuale ed il tipo di armatura trasversale;
5. le caratteristiche meccaniche dei materiali;
6. le caratteristiche dell'aderenza acciaio-calcestruzzo.

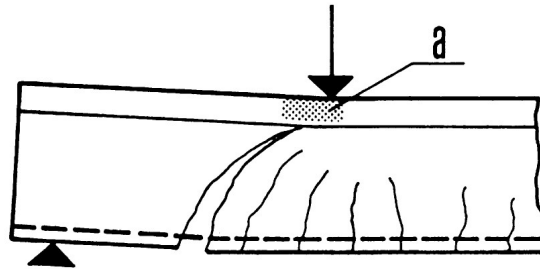


## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### TIPI PRINCIPALI DI ROTTURA PER TAGLIO

#### Rottura per taglio-trazione:

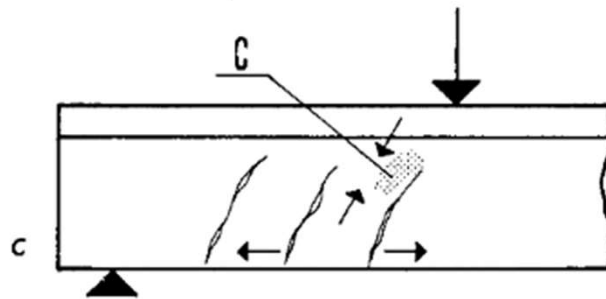
In prossimità dell'appoggio si sviluppano fessure diagonali in direzione delle isostatiche di compressione in direzione del carico, riducendo la zona presso-inflessa fino ad arrivare ad una rottura improvvisa (fragile). Nel caso di presenza di armatura si genera lo snervamento della stessa.



*Rottura della biella tesa*

#### Rottura taglio-compressione:

Tra le fessure a taglio inclinate le diagonali compresse cedono di colpo per il raggiungimento della resistenza a compressione del calcestruzzo prima dello snervamento dell'armatura d'anima. Tale rottura determina il limite superiore della capacità portante a taglio della trave, funzione quindi della resistenza a compressione del calcestruzzo.

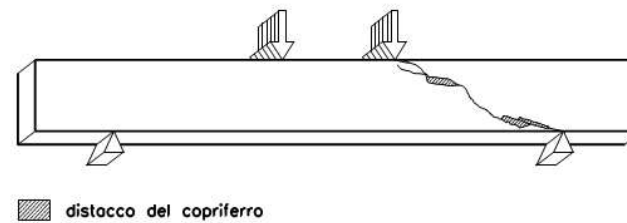
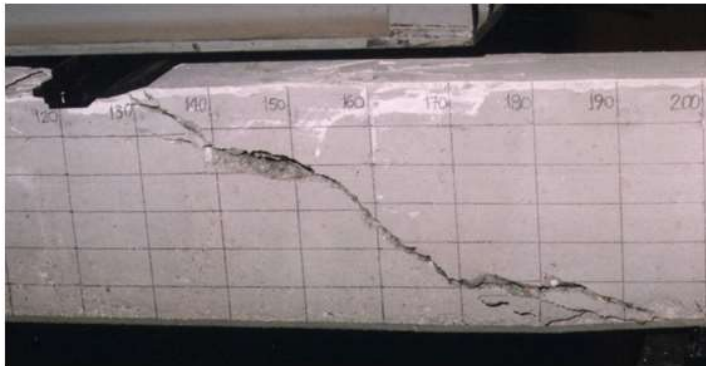


*Rottura della biella compressa*

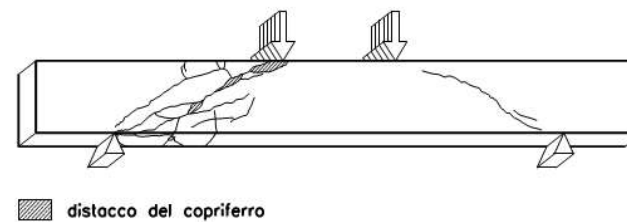
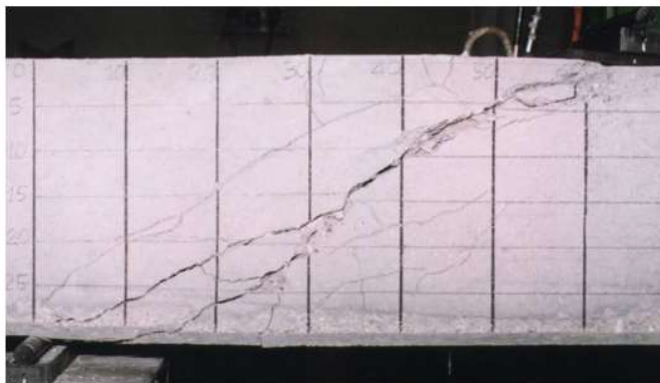
## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO

Modalità di rottura per taglio trazione (trave non armata a taglio)



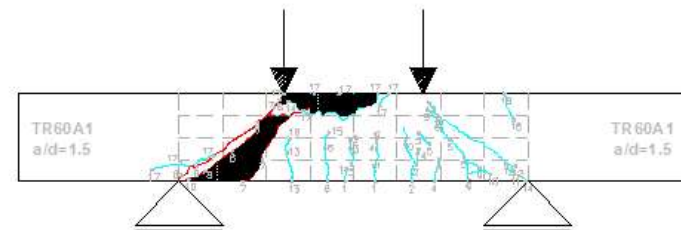
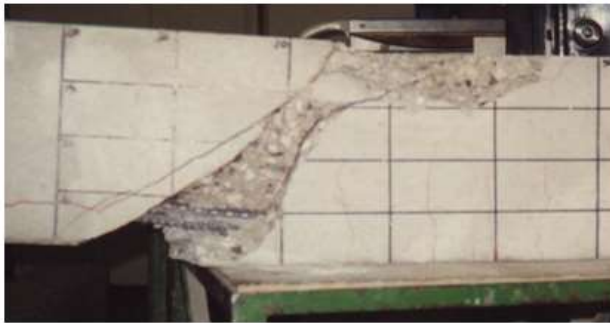
Modalità di rottura per taglio trazione (trave armata a taglio)



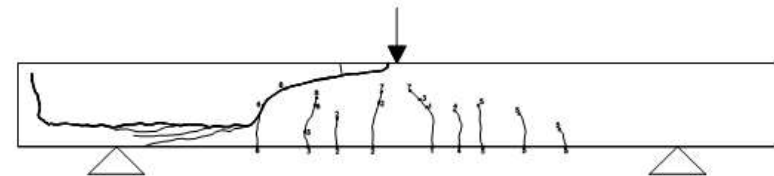
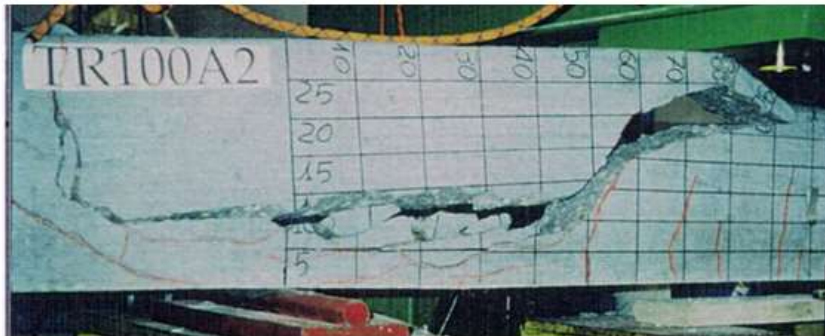
## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### MECCANISMI RESISTENTI PER TAGLIO

Modalità di rottura per taglio compressione



Modalità di rottura per cedimento dell'ancoraggio



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

*Elementi che non richiedono armatura a taglio*

$$V_{Ed} \leq V_{Rdc}$$

Capacità portante a taglio del solo calcestruzzo:

$$V_{Rdc} = \max\{ [0.18 k (100 \rho_1 f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0.15 \sigma_{cp} ] b_w d \quad ; \quad [v_{\min} + 0.15 \sigma_{cp} ] b_w d \}$$

con

$f_{ck}$  resistenza cilindrica a compressione caratteristica in MPa

$\gamma_c$  = fattore di sicurezza parziale per il calcestruzzo (assunto 1.5)

$v_{\min}$  =  $0.035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$

$k$  =  $1 + (200/d)^{1/2} \leq 2.0$  con  $d$  in millimetri

Dove:

$d$  = altezza utile della sezione

$\rho_1$  =  $A_{sl} / (b_w d) \leq 0.02$  rapporto d'armatura corrispondente a  $A_{sl}$

$A_{sl}$  = area dell'armatura longitudinale tesa

$\sigma_{cp}$  =  $N_{Ed} / A_c$  tensione media nel calcestruzzo dovuta alla forza assiale ( $\leq 0.2 f_{cd}$ )

$N_{Ed}$  = forza di compressione nel calcestruzzo in direzione longitudinale

$A_c$  = area di calcestruzzo

$b_w$  = larghezza minima della sezione considerata

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

*(Elementi che non richiedono armatura a taglio)*

$$V_{Rd} = \max\{ [0.18 k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0.15 \sigma_{cp} ] b_w d \quad ; \quad [v_{min} + 0.15 \sigma_{cp} ] b_w d \}$$

$$0.18 / \gamma_c$$

Effetto pettine

$$(100 \rho_l f_{ck})^{1/3}$$

Effetto bietta

$$k = 1 + (200/d)^{1/2} \leq 2.0$$

Effetto ingranamento degli inerti

$$0.15 \sigma_{cp}$$

Contributo dovuto allo sforzo normale di compressione

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

#### *Elementi che richiedono armatura a taglio*

Per tali elementi si ha:  $V_{Ed}$  (taglio di calcolo agente)  $\geq V_{Rdc}$

-> E' necessaria specifica armatura a taglio (armatura trasversale).

In tal caso la resistenza a taglio è data dal minore tra  $V_{Rdmax}$  e  $V_{Rds}$

$$V_{Ed} \leq V_{Rdmax}$$

$$V_{Ed} \leq V_{Rds}$$

dove:

$V_{Ed}$  = taglio di calcolo dovuto ai carichi esterni

$V_{Rdmax}$  = contributo legato alla **resistenza delle bielle di calcestruzzo compresso**

$V_{Rds}$  = contributo legato alla **resistenza delle bielle tese (armatura a taglio)**

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

#### *Elementi che richiedono armatura a taglio*

$$V_{Rds} = 0.9 d (A_{sw}/s) f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \operatorname{sen} \alpha$$

$$V_{Rdmax} = 0.9 d b_w \alpha_c v f_{cd} (\cot \theta + \cot \alpha) / (1 + \cot^2 \theta)$$

con:

$A_{sw}$  = area dell'armatura trasversale

$s$  = passo delle staffe

$\alpha$  = angolo di inclinazione dell'armatura trasversale

$v f_{cd}$  = resistenza di progetto a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ( $v = 0.5$ )

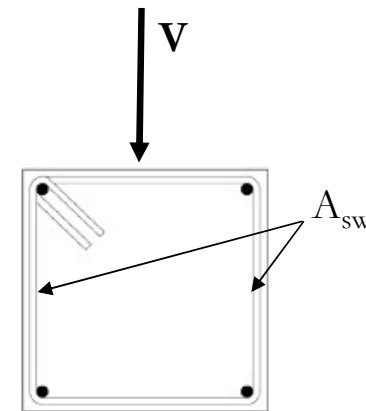
$\alpha_c$  = coefficiente amplificativo pari a

1	per $\sigma_{cp} = 0$
$1 + \sigma_{cp} / f_{cd}$	per $0 \leq \sigma_{cp} \leq 0.25 f_{cd}$
1.25	per $0.25 f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0.5 f_{cd}$
$2.25 (1 - \sigma_{cp} / f_{cd})$	per $0.5 f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

$\theta$  = angolo di inclinazione delle fessure o delle bielle compresse

tale per cui:  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

ovvero:  $21.8 \leq \theta \leq 45^\circ$



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

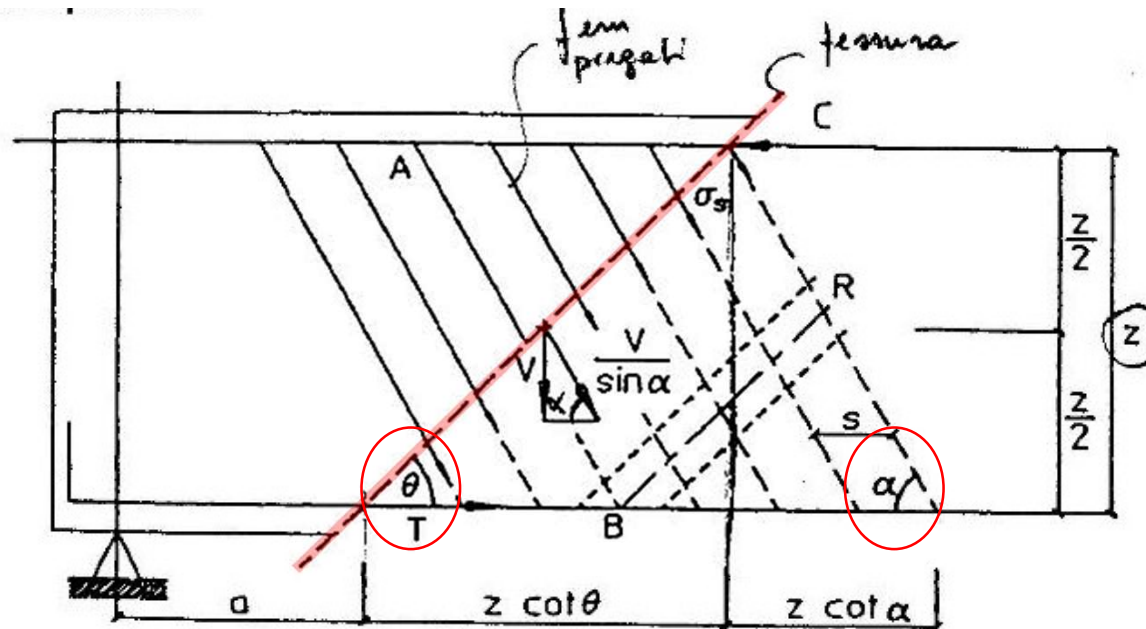
### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

#### *Elementi che richiedono armatura a taglio*

In generale con una fessura a taglio inclinata di  $\theta$  attraversata da armature trasversali aventi area  $A_{sw}$ , inclinazione  $\alpha$ , tensione  $\sigma_s$  e passo  $s$ , indicando con  $V$  lo sforzo di taglio e con  $z$  il braccio delle forze interne, **l'equilibrio alla traslazione nella direzione delle armature trasversali** si scrive:

$$V/\sin\alpha = n \sigma_s A_{sw}$$

$n =$  numero di armature che attraversano la fessura





**IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio**

**VERIFICA A TAGLIO (SLU)**

*Elementi che richiedono armatura a taglio*

$V/\sin\alpha = n \sigma_s A_{sw}$

$n$  = numero di armature che attraversano la fessura

Per determinare il numero di armature che attraversano la fessura si può scrivere che:

$n s = z \cot \theta + z \cot \alpha$

⇒

$n = (z \cot \theta + z \cot \alpha) / s$

quindi:

$V = [z (\cot \theta + \cot \alpha) \sigma_s A_{sw} \sin \alpha] / s$

(\*)

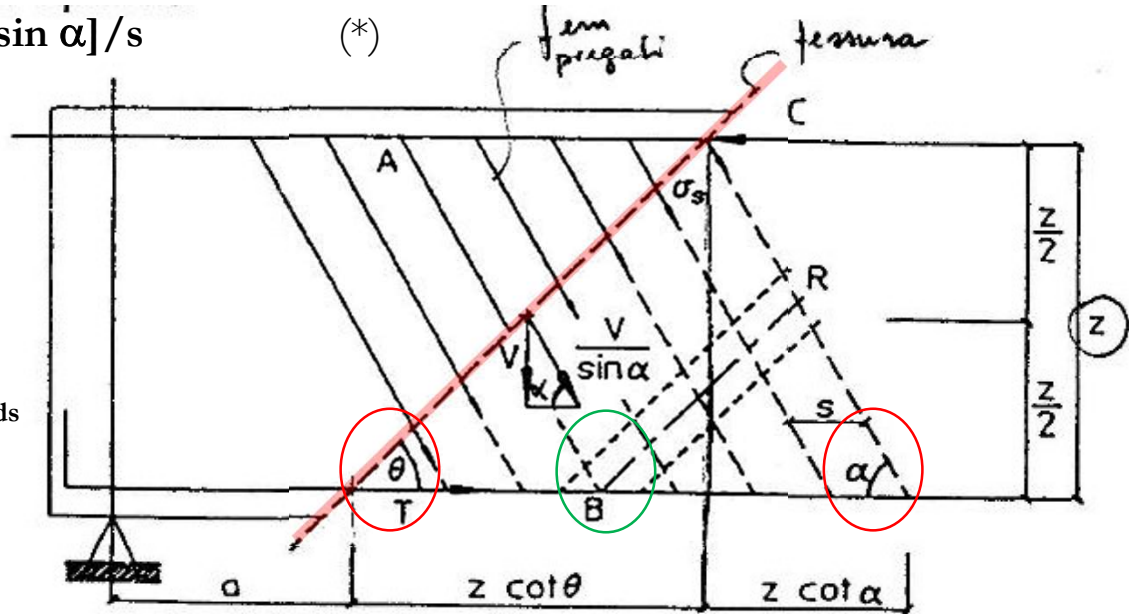
Se si pone allo SLU:

$z = 0.9 d$

$\sigma_s = f_{yd}$

si ottiene l'espressione di  $V_{Rds}$

$V_{Rds} = 0.9 d (A_{sw}/s) f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$



## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

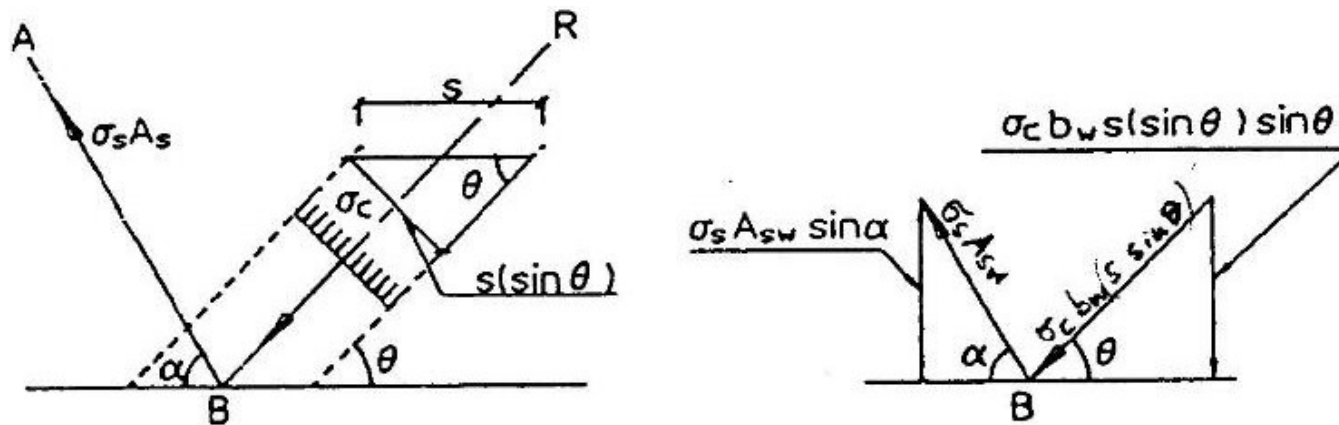
### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

#### *Elementi che richiedono armatura a taglio*

Secondo la Figura che segue, la biella compressa RB corrisponde alla biella tesa AB spiccante dal corrente teso.

La componente verticale della biella tesa AB deve equilibrare la componente verticale della risultante delle tensioni  $\sigma_c$  su RB. Si ha pertanto:

$$\sigma_s A_{sw} \sin \alpha = (\sigma_c b_w s \sin \theta) \sin \theta \quad (\bullet)$$



Particolare nodo B

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

#### *Elementi che richiedono armatura a taglio*

Ricordando l'espressione ottenuta in precedenza per il taglio portato dalle staffe (\*):

$$V = [z (\cot \theta + \cot \alpha) \sigma_s A_{sw} \sin \alpha] / s$$

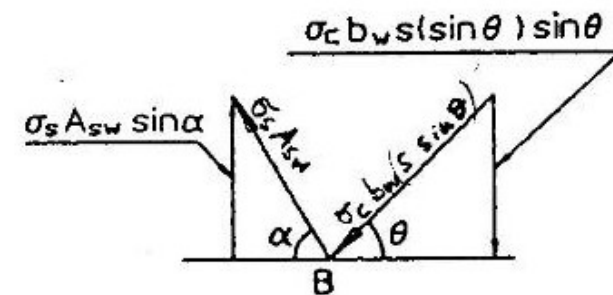
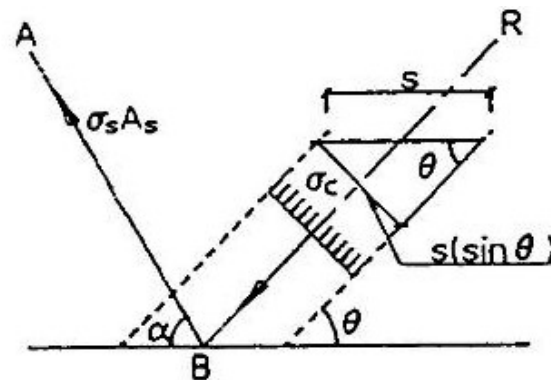
e sostituendo la (\*)  $\sigma_s A_{sw} \sin \alpha = (\sigma_c b_w s \sin \theta) \sin \theta$  si ha:

$$V = [z (\cot \theta + \cot \alpha) (\sigma_c b_w s \sin \theta) \sin \theta] / s = \sigma_c b_w z (\cot \theta + \cot \alpha) \sin^2 \theta = \sigma_c b_w z (\cot \theta + \cot \alpha) / (1 + \cot^2 \theta)$$

Se si pone allo SLU:

$$z = 0.9 d$$

$$\sigma_c = \alpha_c \nu f_{cd}$$



si ottiene l'espressione di  $V_{Rdmax}$

Particolare nodo B

$$V_{Rdmax} = 0.9 d b_w \alpha_c \nu f_{cd} (\cot \theta + \cot \alpha) / (1 + \cot^2 \theta)$$

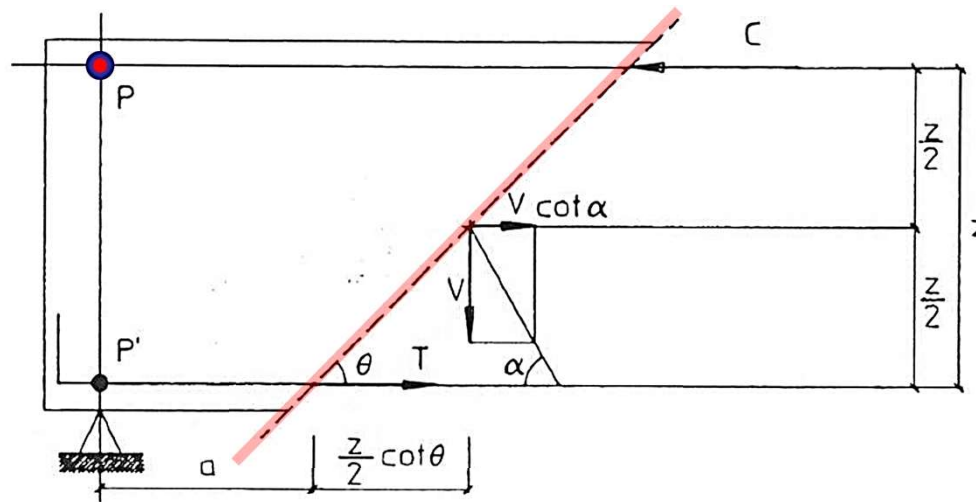
## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

#### Traslazione del diagramma del momento flettente – sforzo di trazione aggiuntivo

Se le fessure fossero verticali, nella sezione a distanza «a» dall'appoggio la forza di trazione T nell'armatura longitudinale tesa sarebbe:

$$T = (V a) / z = |M| / z$$



C= risultante di compressione

T= risultante di trazione

V= taglio - componente verticale della risultante

$V \cot \alpha$  = componente orizzontale della risultante

$$z \approx 0.9 d$$

Poiché le fessure sono inclinate di un angolo  $\theta$  la forza T può essere calcolata imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno al punto P del concio di trave a sinistra della fessura assumendo che la distribuzione di tensione sulle armature sia uniforme:

$$T z - V (a + z/2 \cot \theta) + V \cot \alpha z/2 = 0$$

## IL CALCESTRUZZO ARMATO – Il comportamento a taglio

### VERIFICA A TAGLIO (SLU)

Traslazione del diagramma del momento flettente – sforzo di trazione aggiuntivo

Da cui:

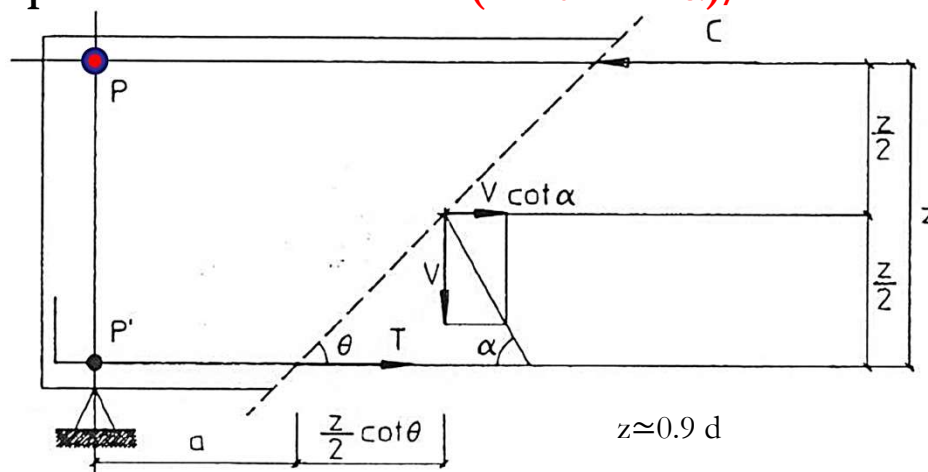
$$T = V/z [a + z/2 (\cot \theta - \cot \alpha)] = |M|/z + |V|/2 (\cot \theta - \cot \alpha) =$$

$$= |V a|/z + |V|/2 (\cot \theta - \cot \alpha)$$

$|V|/2 (\cot \theta - \cot \alpha)$  sforzo di trazione aggiuntivo dovuto al taglio tale per cui è necessaria una armatura longitudinale aggiuntiva pari a:

$$A_{sl} = |V| / (2 f_{yd}) (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Lo sforzo  $T$  nel corrente teso della trave fessurata nella sezione a distanza «a» dall'asse dell'appoggio, deve essere calcolato in base al momento flettente agente nella sezione posta a distanza « $a + z (\cot \theta - \cot \alpha)/2$ ».



C= risultante di compressione

T= risultante di trazione

V= componente verticale della risultante

$V \cot \alpha$ = componente orizzontale della risultante