Introduzione alla teoria dei giochi

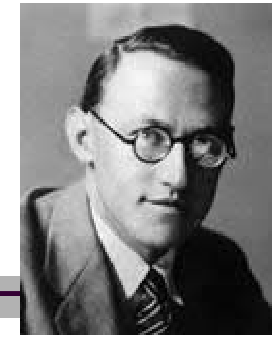
- michele.moretto@unipd.it
- Department of Economics and Management
- Università di Padova

- Pnrr 2023-24

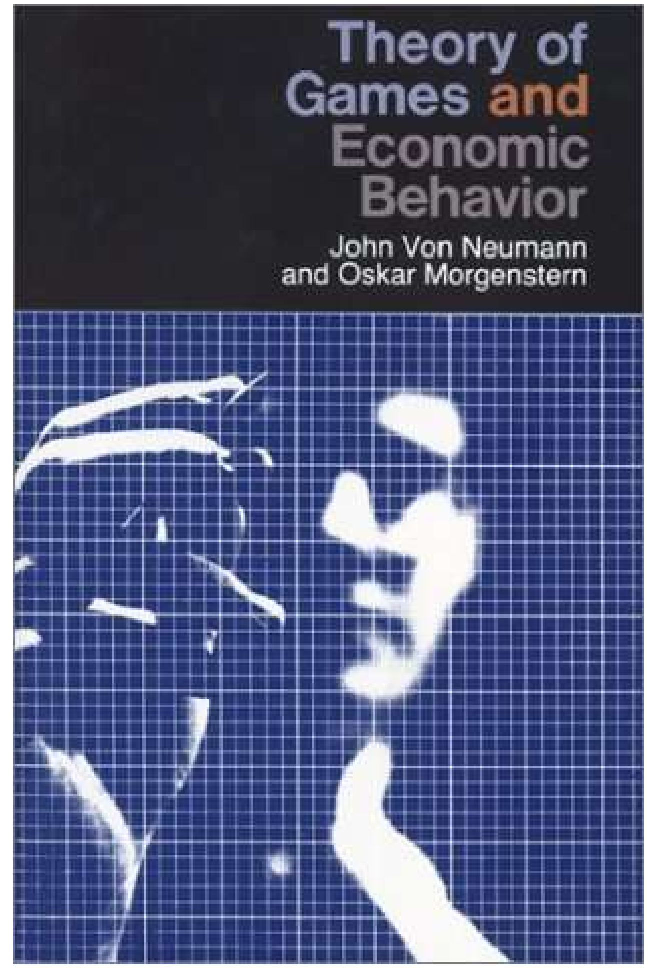
In the beginning

- Alcune idee di teoria dei giochi risalgono al XVIII secolo.
- Emile Borel (1871~1956) e John von Neumann (1903~1957) hanno dato inizio al grande sviluppo della teoria dei giochi.
- Lo sviluppo importante arriva con John Nash che vedremo più avanti

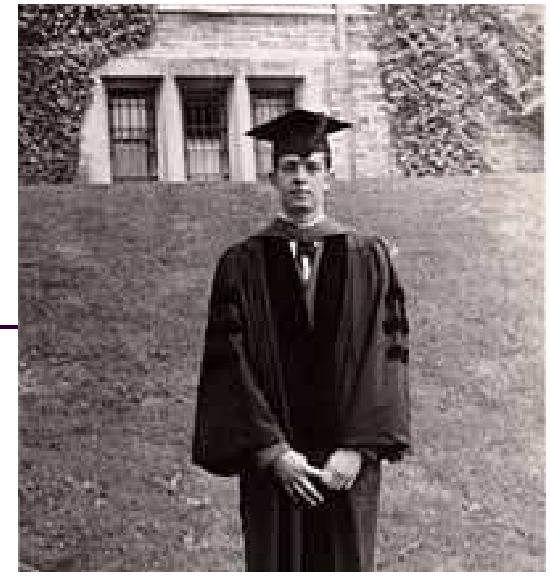
The book



- La teoria dei giochi è diventata un campo di applicazione della matematica a partire dal libro di John von Neumann and Oskar Morgenstern publicato nel 1944.



John Nash(1928-2015)



- Ottiene il Ph.D. da Princeton University con una tesi di 28 pagine nel suo 22-esimo compleanno.

  Inventa il concetto di Equilibrio di Nash.

- Ha scritto un articolo fondamentale sulla teoria delle contrattazioni (bargain).

Che cosa è la teoria dei giochi?

- **La Teoria dei Giochi** è un modo formale di analizzare l'interazione strategica tra un gruppo di giocatori (o agenti) razionali che si comportano strategicamente
- La teoria dei giochi ha applicazioni
  - Economiche,
  - Politiche, Militari (Studio dei conflitti), Giuridiche
  - Sociologiche ..etc.

Che cosa è la teoria dei giochi?

- Noi ci concentreremo su giochi dove:
  - Ci sono almeno due giocatori **Razionali (Rationality)**
  - Ogni giocatore ha più di una scelta
  - Il risultato finale dipende dalle strategie scelte da tutti i giocatori; c'è interazione strategica.

- Esempio: Sei persone vanno ad un ristorante.
  - Ogni persona paga il proprio pasto – *un problema semplice di decisione*
  - Prima del pranzo, ogni persona è d'accordo a dividere il conto fra tutti i partecipanti – *un gioco*

Rationality

Assunzioni:

- Gli esseri umani sono esseri razionali (in particolare nelle loro scelte economiche)
- Gli esseri umani cercano sempre l'alternativa migliore in un insieme di scelte possibili. Ogni persona massimizza la propria ricompensa (benessere, profitto, reddito etc.)

Why assume rationality?

- Restringere il ventaglio delle possibilità di scelta
- Prevedibilità
- Fornisce un criterio di valutazione dell'efficienza di un sistema (economico).

La strategia

- **Definizione**: piano d'azione preparato **a priori** in base alle regole del gioco, cioè specificazione teorica completa delle mosse che il giocatore farà ogni volta che dovrà prendere una decisione.

- **Come viene scelta**: in base alla massimizzazione del risultato (vincere il massimo possibile e perdere il minimo possibile)

Equilibri

Equilibrio in strategie dominanti:

1. io faccio meglio che posso indipendentemente da ciò che fai tu;
2. tu fai meglio che puoi indipendentemente da ciò che faccio io.

Equilibrio di Nash:

Coppia di strategie rispetto alle quali nessuno dei due giocatori ha interesse ad essere l'unico a cambiare

1. io faccio meglio che posso dato ciò che fai tu;
2. tu fai meglio che puoi dato ciò che faccio io.

Nash's Theorem

- Esistenza
  - Ogni gioco con un numero finito di giocatori ammette almeno un equilibrio di Nash (potendo fare uso anche di strategie miste)
- Trovare un Equilibrio di Nash non è facile
  - Non efficiente dal punto di vista algoritmico…
  - Intelligenza artificiale può aiutare?

Agenda dell’intervento

1) Giochi con decisioni simultanee: rappresentati con matrici.
Sono detti: *giochi in forma normale (o strategica)*

2) Giochi con decisioni in sequenza (prima un giocatore poi un altro..): rappresentati con alberi delle decisioni
Sono detti: *giochi in forma estesa*

....

- Esempi di giochi a mosse simultanee
  - Dilemma del prigioniero
  - La battaglia dei sessi
  - Chicken game (deterrrenza)
  - Matching pennies
- Questi sono giochi statici (one shot) ad informazione completa (o a mosse simultanee)
- Giochi sequenziali (Scacchi, Carte, Gioco di minaccia)

Esempio di gioco in forma normale

		Giocatore 2	
		L	R
Giocatore 1	T	5 5	6 3
	B	3 6	4 4

Il Dilemma del Prigioniero (Von Neumann e Morgenstern, 1944)

- 2 persone, sospettate di aver commesso un grave crimine insieme, vengono arrestate
- la polizia non ha sufficienti prove per dimostrare la loro colpevolezza
- e quindi può solo incriminarli per reati minori

… a meno che uno dei due confessi!

Prisoner’s Dilemma

Una proposta

Chiusi in celle separate a ciascuno dei due prigionieri viene fatta una proposta:

"se confessi il crimine ed accetti di testimoniare contro il tuo compagno, ti libereremo!"

Prospettiva interessante, ma…

- se entrambi accettano la proposta, si discrediteranno a vicenda agli occhi del giudice, ed incapperanno in una dura condanna;

- se nessuno dei due accetta, la pena sarà molto lieve per entrambi.

Formalizzando la situazione

		Prigioniero B	
		Non parla	*Confessa contro il compagno*
Prigioniero A	*Non parla*	Pena molto lieve per entrambi	Scarcerazione per B, massima pena per A
	Confessa contro il compagno	Scarcerazione per A, massima pena per B	Pena piuttosto severa per entrambi

Quale scelta prendere?

Se i due prigionieri potessero interagire e scegliere una strategia comune, con ogni probabilità opterebbero per non parlare.

Ma la scelta è individuale…

Dovendo scegliere senza conoscere l'intenzione del compagno, la strategia che minimizza il rischio risulta essere quella di tradire.

Dimostrazione

Scegliendo di tradire (i.e. confessare), infatti:

- si viene scarcerati, nel caso in cui il compagno non confessi a sua volta;
- si evita la pena massima, nel caso in cui il compagno tradisca.

Il dilemma

Siccome il singolo individuo è portato a tradire, la situazione raggiunta è per forza di cose una soluzione sub-ottimale del problema!

Rappresentazione "normale" del Dilemma del Prigioniero

- Un piccolo esempio numerico

		Prigioniero 2: Nega	Prigioniero 2: Confessa
Prigioniero 1	Nega	-1 , -1	-9 , 0
	Confessa	0 , -9	-6 , -6

Rappresentazione "normale" del Dilemma del Prigioniero.

- Insieme di giocatori: {Prigioniero 1, Prigioniero 2}
- Insieme delle strategie: $S_1 = S_2 =$ **{Nega, Confessa}**
- Funzioni di Payoff :

$u_1(N, N)=-1,\ u_1(N, C)=-9,\ u_1(C, N)=0,\ u_1(C, C)=-6;$
$u_2(N, N)=-1,\ u_2(N, C)=0,\ u_2(C, N)=-9,\ u_2(C, C)=-6$

Giocat.

Strateg.

Payoffs

Prig. 1 \ Prig. 2	Nega	Confessa
Nega	-1 , -1	-9 , 0
Confessa	0 , -9	-6 , -6

Risolvere il Dilemma del Prigioniero

- Confessare dà sempre un risultato migliore indipendentemente dalla scelta dell’altro
- Strategia dominata
  - Esiste un’altra strategia che dà sempre risultati migliori indipendentemente dalla scelta degli altri.

Giocatori

Strategie

Payoffs

		Prisoner 2	
		Nega	Confessa
Prigion. 1	Nega	-1 , -1	-9 , 0
	Confessa	0 , -9	-6 , -6

Equilibrio di Nash : idea

- Equilibrio di Nash
  - Un insieme di strategie, una per ogni giocatore, tale che la strategia di ogni giocatore sia la sua migliore possibile considerato che tutti gli altri giocatori stanno giocando la loro migliore strategia o
  - Una situazione stabile nella quale nessun giocatore vuole deviare se gli altri confermano la propria posizione

(Confessa, Confessa) è un equilibrio di Nash.

Prig. 2

Prig. 1		Nega	Confessa
	Nega	-1 , -1	-9 , 0
	Confessa	0 , -9	<u>-6</u> , <u>-6</u>

Modello per la guerra fredda

- **Giocatori** : Stati Uniti e URSS
- **Confessione** = armamento con l'atomica
- **Non confessione** = non armamento

Secondo il modello del dilemma del prigioniero era inevitabile la corsa agli armamenti, anche se la situazione più auspicabile sarebbe stata quella del non armamento di entrambi.

Modello per la guerra fredda

Se il paese avversario costruisce dei missili intercontinentali a testata multipla, è conveniente per noi fare lo stesso?

Il problema è descritto dalla matrice seguente, in cui SM e NM indicano le scelte 'Si ai Missili' e 'No ai Missili' (Nella tabella è riportato un indice di welfare geopolitico del paese)

		Paese 2	
		SM	NM
Paese 1	SM	10 ; 10	200 ; 0
	NM	0 ; 200	100 ; 100

Dilemma del prigioniero e fissazione dei prezzi (All'interno della tabella sono i profitti attesi)

		impresa A	
		prezzo alto	prezzo basso
impresa B	prezzo alto	500 ; 500	100 ; 700
	prezzo basso	700 ; 100	300 ; 300

fonte: A. Schotter Microeconomia, Giappichelli, Torino

La battaglia dei sessi

- In posti separati, Chris e Pat devono scegliere di passare la serata all'opera o a un combattimento di boxe.
- Sia Chris che Pat sanno quanto segue:
  - Entrambi vorrebbero passare la serata insieme.
  - Ma Chris preferisce l'opera.
  - Pat preferisce la boxe.

		Pat: Opera	Pat: Boxe
Chris	Opera	2 , 1	0 , 0
	Boxe	0 , 0	1 , 2

Esempio: La battaglia dei sessi

		Pat: Opera	Pat: Boxe
Chris	Opera	2 , 1	0 , 0
	Boxe	0 , 0	1 , 2

- Rappresentazione in forma Normale:
  - Insieme giocatori:{ Chris, Pat } (={Player 1, Player 2})
  - Insieme strategie: $S_1 = S_2 = \{$ Opera, Boxe$\}$
  - Funzioni di Payoff :

    u_1(O, O)=2, u_1(O, B)=0, u_1(B, O)=0, u_1(B, B)=1;

    u_2(O, O)=1, u_2(O, B)=0, u_2(B, O)=0, u_2(B, B)=2

Risolvere la battaglia dei sessi

		Pat	
		Opera	Boxe
Chris	Opera	2 , 1	0 , 0
	Boxe	0 , 0	1 , 2

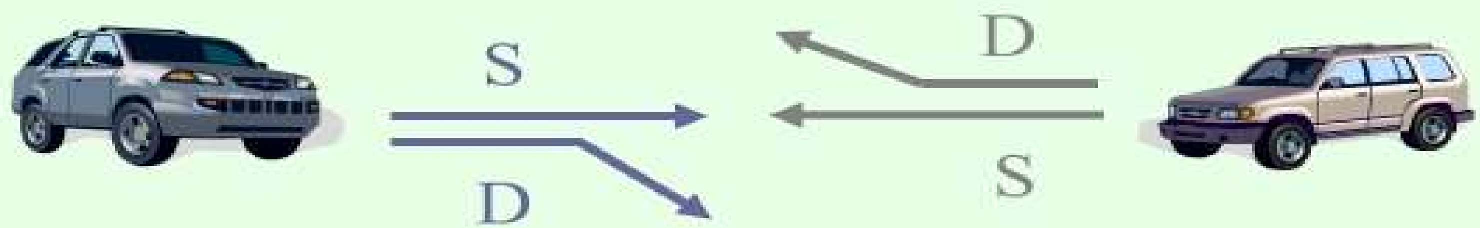
- Opera è la risposta ottima di Player 1 alla strategia di Player 2 Opera
- Opera è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Opera
  - Quindi, (Opera, Opera) è un Equilibrio di Nash

- Fight è la risposta ottima di Player 1 alla strategia di Player 2 Fight
- Fight è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Fight
  - Quindi, (Boxe, Boxe) è un Equilibrio di Nash

Chicken Game (la corsa del pollo/codardo)

"Chicken"

- Two players drive cars towards each other
- If one player goes straight, that player wins
- If both go straight, they both die



	D	S
D	0, 0	-1, 1
S	1, -1	-5, -5

not zero-sum

Soluzione del Chicken Game (la corsa del pollo/codardo)

		Paolo	
		Devia	Non Devia
Gianni	Devia	(0, 0)	(-1,1)
	Non Devia	(1 -1)	(-5,5)

Ci sono due equilibri di Nash: (-1,1), cioè si sposta Gianni e non si sposta Paolo; (1,-1), cioè si sposta Paolo e non si sposta Gianni.

Non esiste una strategia razionale adottabile da entrambi i giocatori, anche se "virano entrambi" è meno rischioso di "nessuno dei due vira".

Chicken Game
(Unione Europea vs Grecia 2009)

		Unione Europea	
		Aiuti	NO aiuti (Grexit)
Tsypras Grecia	Riforme	2 ; 2	1 ; 3
	NO a riforme	3 ; 1	0 ; 0

La “deterrenza”

- La “corsa del codardo” si presta a descrivere la “deterrenza”, cioè la credibilità di una minaccia.

- Durante la guerra fredda entrambe le superpotenze sarebbero state disposte a scatenare una guerra nucleare piuttosto che fare la figura del “codardo” con l’avversario.

Matching pennies

- Ognuno dei due giocatori ha una monetina.
- I due giocatori devono scegliere simultaneamente se mostrare Testa o Croce.
- Entrambi i giocatori conoscono le seguenti regole:
  - Se le due monetine hanno entrambi lo stesso esito (entrambe testa or entrambe croce) allora il giocatore 2 vince la moneta del giocatore 1.
  - In caso diverso, il giocatore 1 vince la moneta del giocatore 2.

		Giocatore 2: Testa	Giocatore 2: Croce
Giocatore 1	Testa	-1 , 1	1 , -1
	Croce	1 , -1	-1 , 1

Esempio: Matching pennies

		Player 2 Testa	Player 2 Croce
Player 1	Testa	-1 , 1	1 , -1
Player 1	Croce	1 , -1	-1 , 1

- Rappresentazione in forma normale:
  - Insieme giocatori: {Player 1, Player 2}
  - Insieme strategie: $S_1 = S_2 = \{ \underline{T}esta, \underline{C}roce \}$
  - Funzioni di Payoff :

$u_1(T, T)=-1,\ u_1(T, C)=1,\ u_1(C, T)=1,\ u_1(C, C)=-1;$
$u_2(T, T)=1,\ u_2(T, C)=-1,\ u_2(C, T)=-1,\ u_2(C, C)=1$

Soluzione del Matching pennies

		Player 2 Head	Player 2 Tail
Player 1	Head	-1 , <u>1</u>	<u>1</u> , -1
	Tail	<u>1</u> , -1	-1 , <u>1</u>

- Head è la risposta ottima di Player 1 alla strategia di Player 2 Tail
- Tail è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Tail

- Tail è la risposta ottima di Player alla strategia di Player 2 Head
- Head è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Head

  - Quindi, NON c'è equilibrio di Nash

Esempio

Un Governo vorrebbe attivare un programma di sostegno alla disoccupazione.
E’ disposto ad aiutare un individuo che è disoccupato ma che è attivo nel cercare una occupazione, tuttavia non vorrebbe in questo modo disincentivare l’individuo a cercare una occupazione sapendo che sarà comunque sostenuto dallo Stato.

		Individuo	
		Cerca Lavoro	Non cerca lavoro
Governo	Sussidia	3,2	-1,3
	Non sussidia	-1,1	0,0

Who Plays When?

- Ci sono giochi in cui un giocatore gioca prima di un altro.Such games are sequential play games.

- Il giocatore che gioca per primo è il leader. Il giocatore che gioca per secondo è il gregario (the follower) .

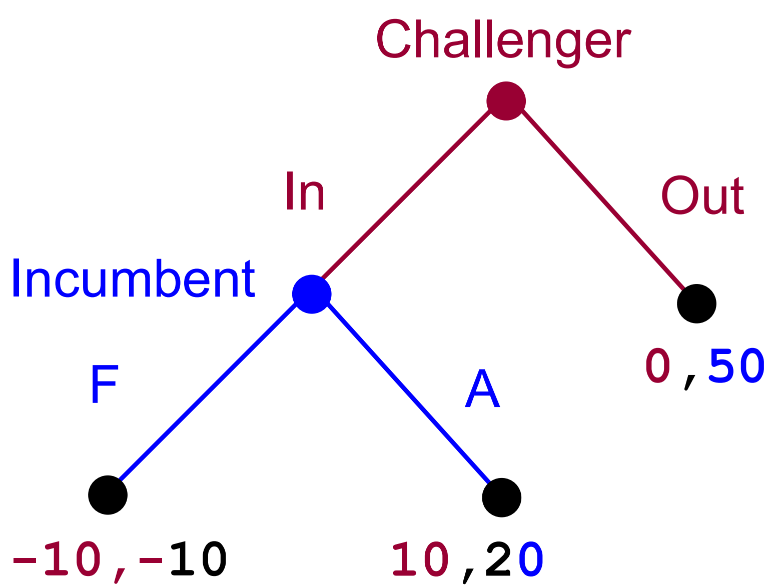
Sequential Games

- Come abbiamo visto, a volte un gioco ha più di un equilibrio di Nash ed è difficile dire quale sia più probabile che si verifichi.

- Quando un gioco di questo tipo diventa sequenziale, a volte è possibile sostenere che uno degli equilibri di Nash ha più probabilità di verificarsi rispetto all'altro.

Gioco dell'entrata sul mercato

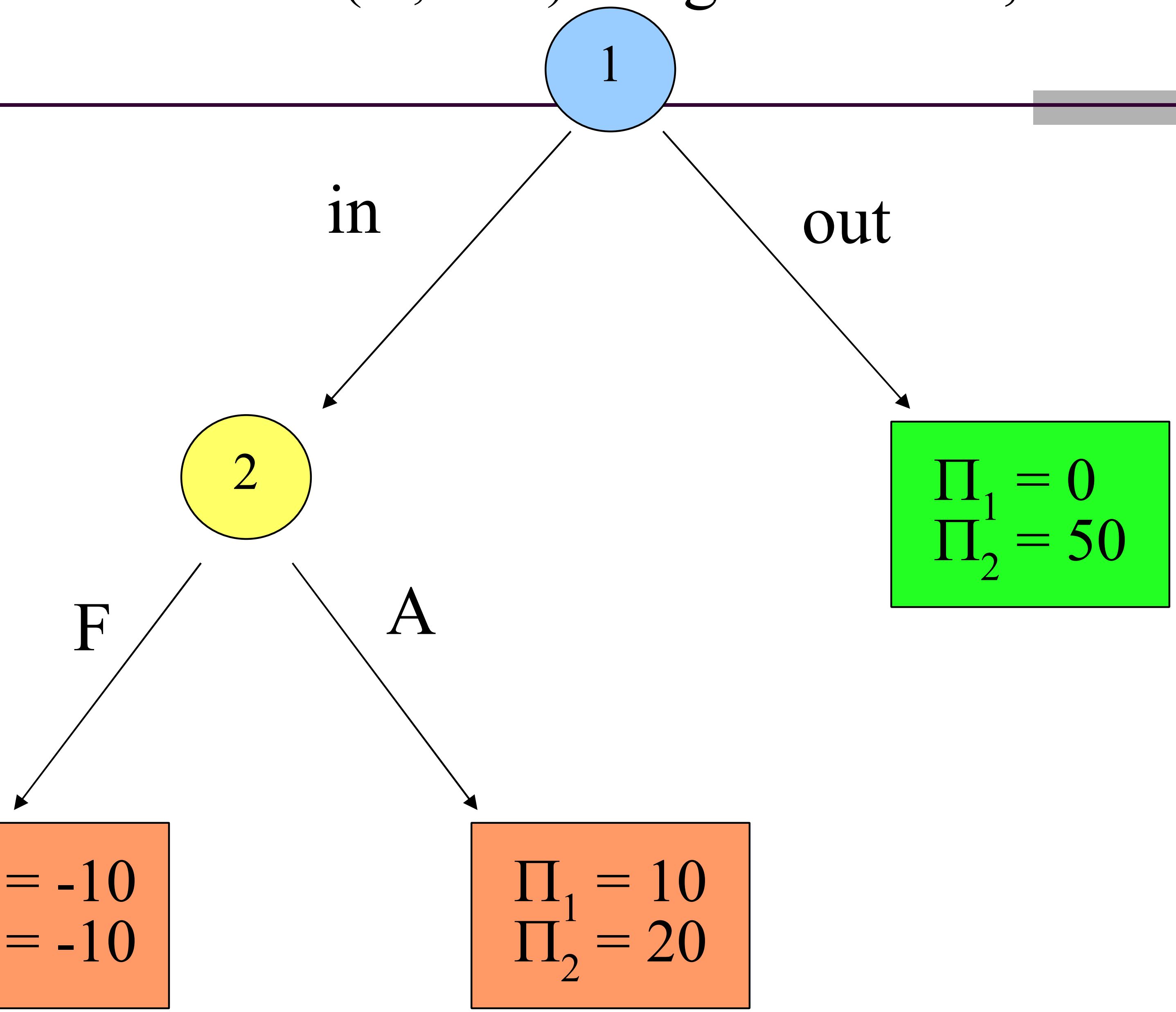
- Un monopolista già sul mercato (incumbent) è posto di fronte ad una possibile entrata sul mercato di un challenger.
- Il challenger può scegliere se entrare (enter) o restare fuori (stay out).
- Se il challenger entra, il monopolista (incumbent) può scegliere se cooperare (accommodate) o se combatterlo (fight).
- I payoffs del gioco sono conoscenza comune.



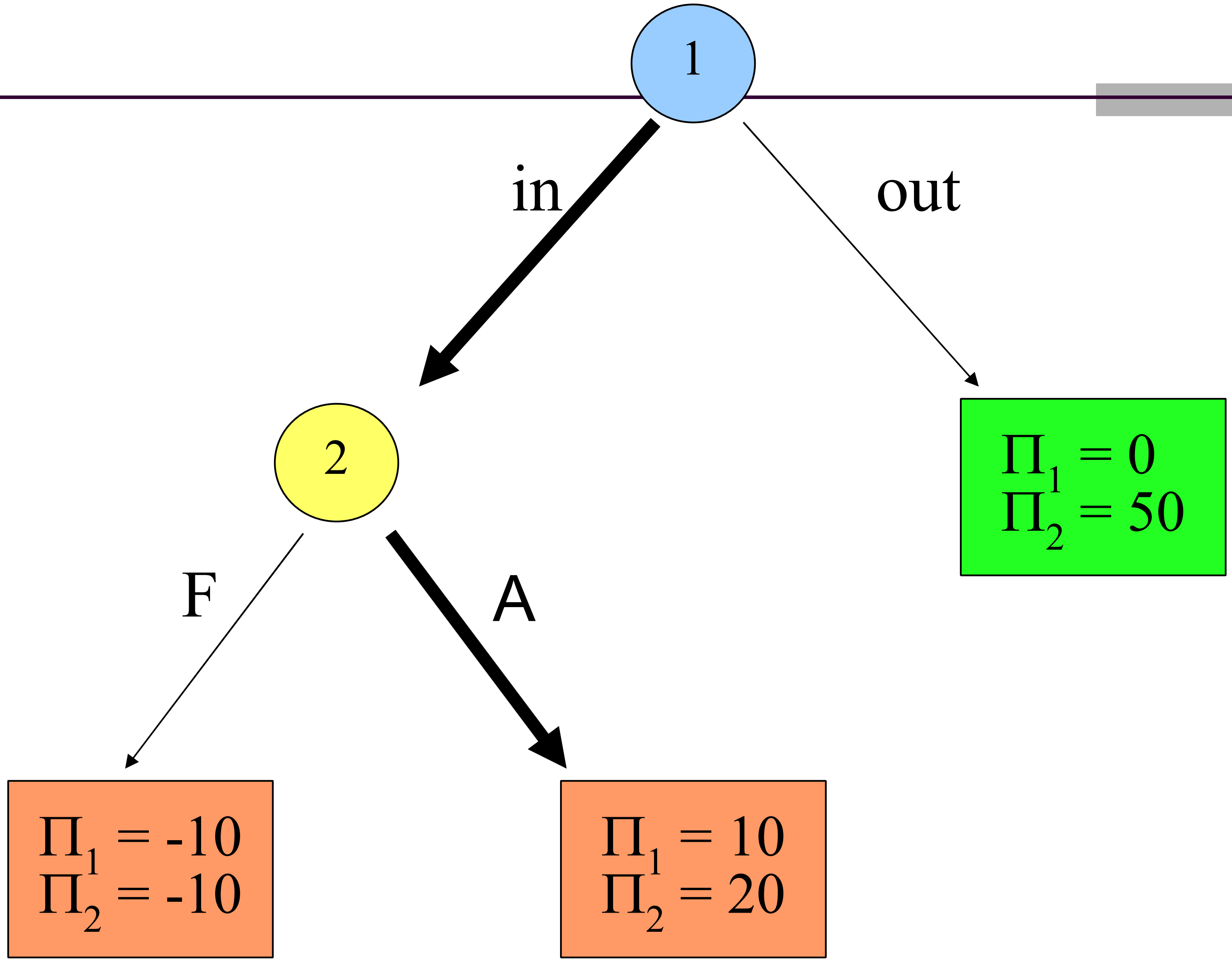
Il primo numero è il payoff del challenger. Il secondo numero è il payoff dell'incumbent.

Gioco Della Minaccia

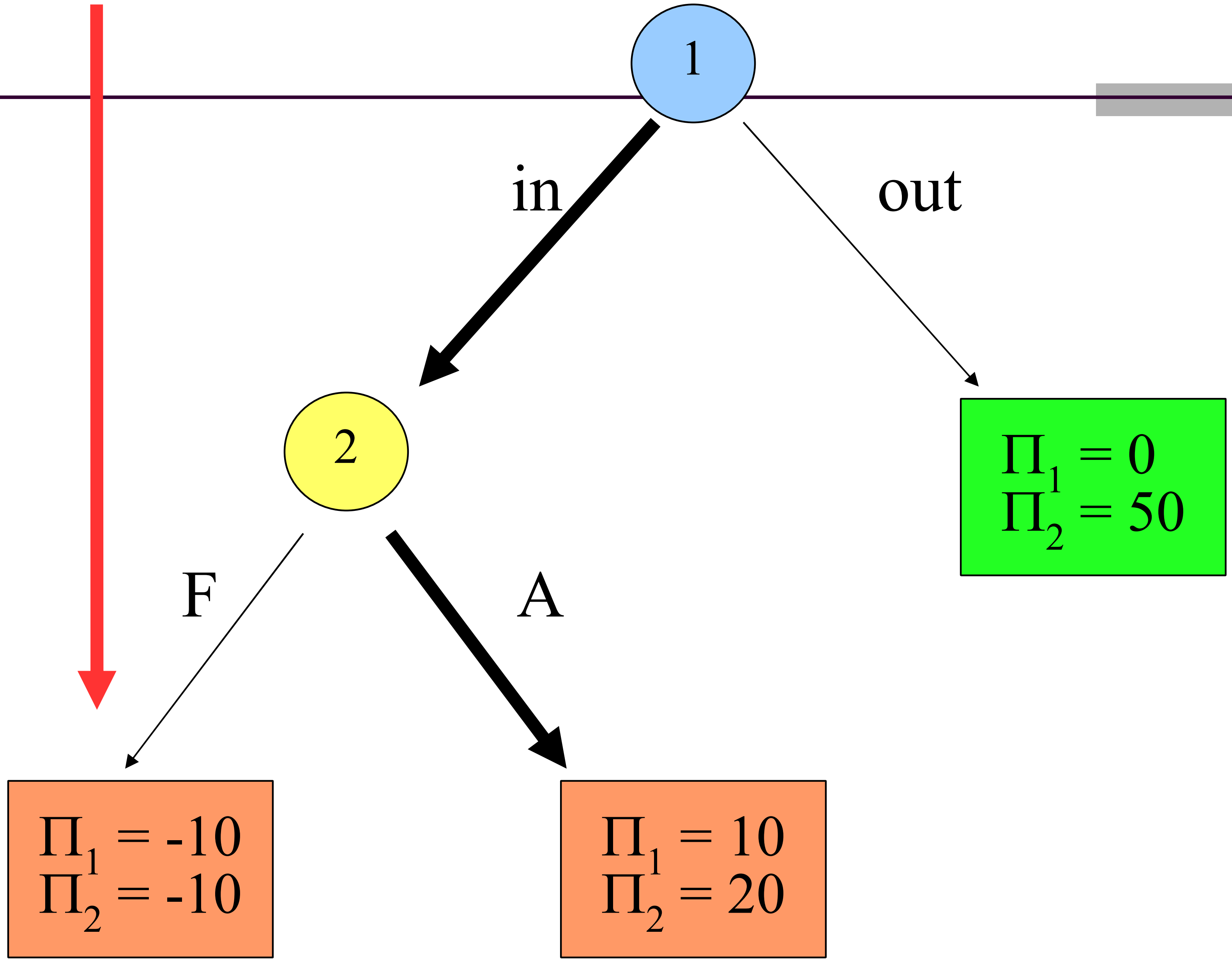
Entrare o Non Entrare (In, *Out*) - Fight/Guerra , Accomodate (F, *A*)



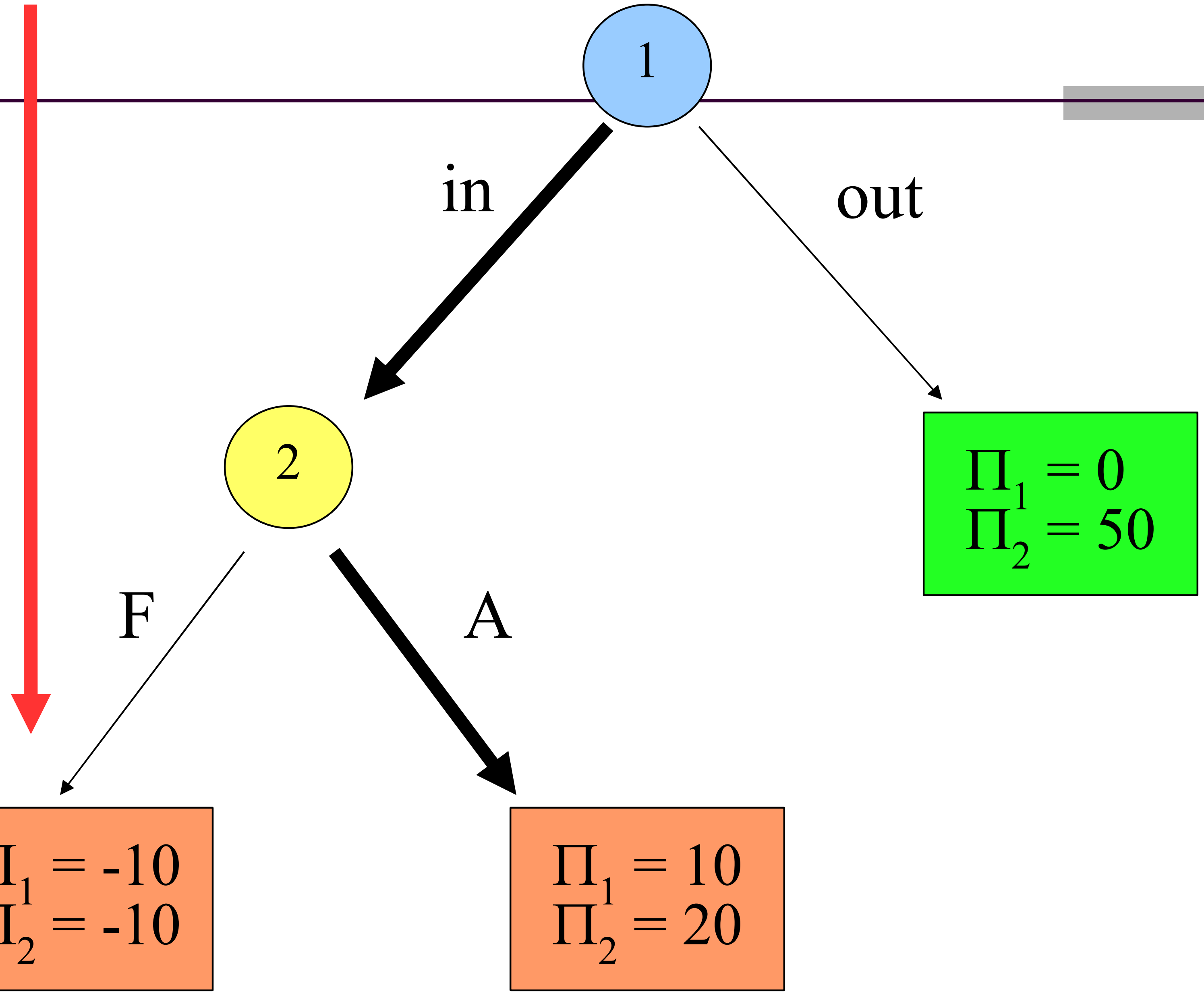
Induzione a ritroso – La soluzione del gioco



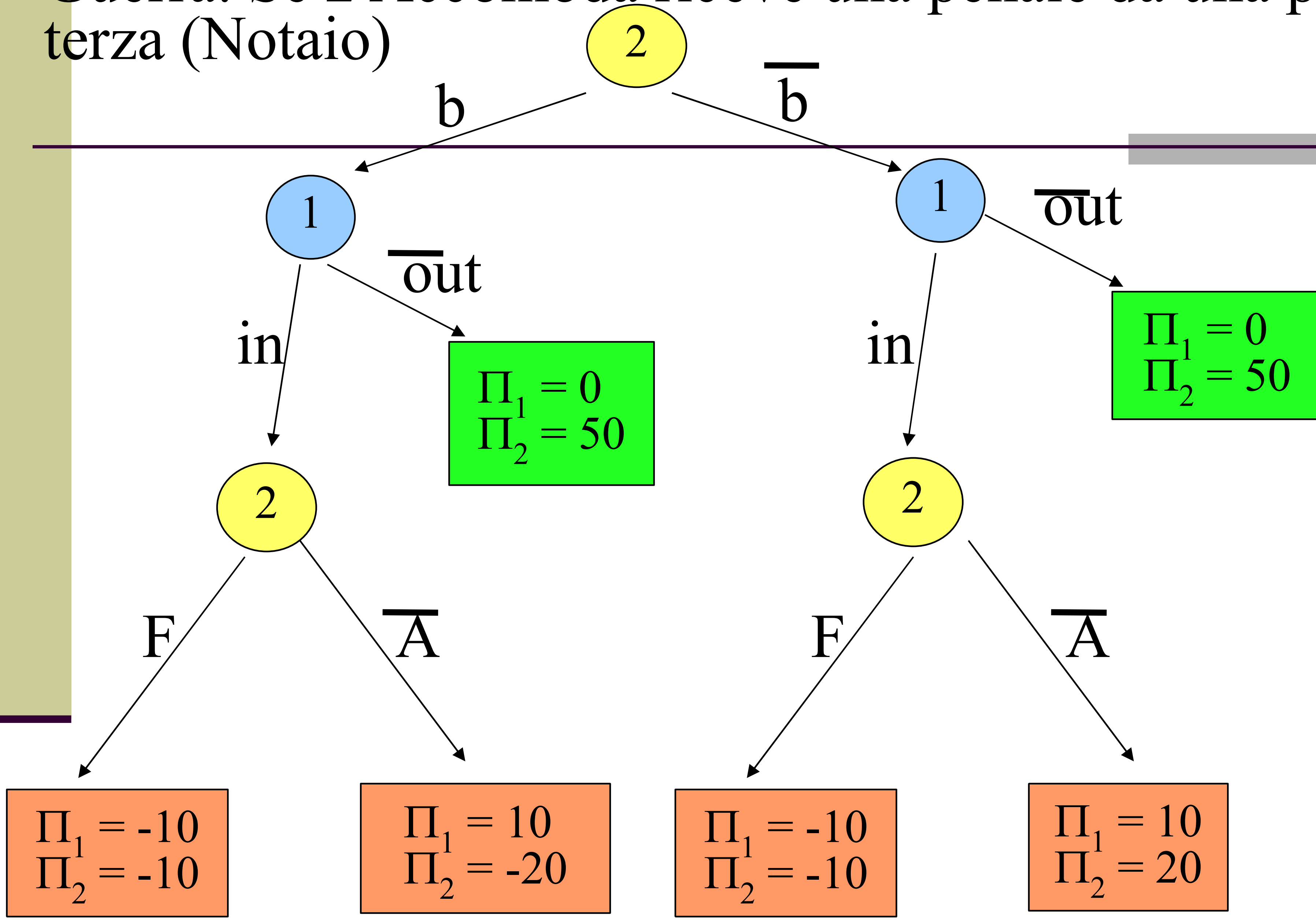
Perché l'impresa "1" entra non considerando il pericolo di Fight/Guerra (*minaccia non credibile)*



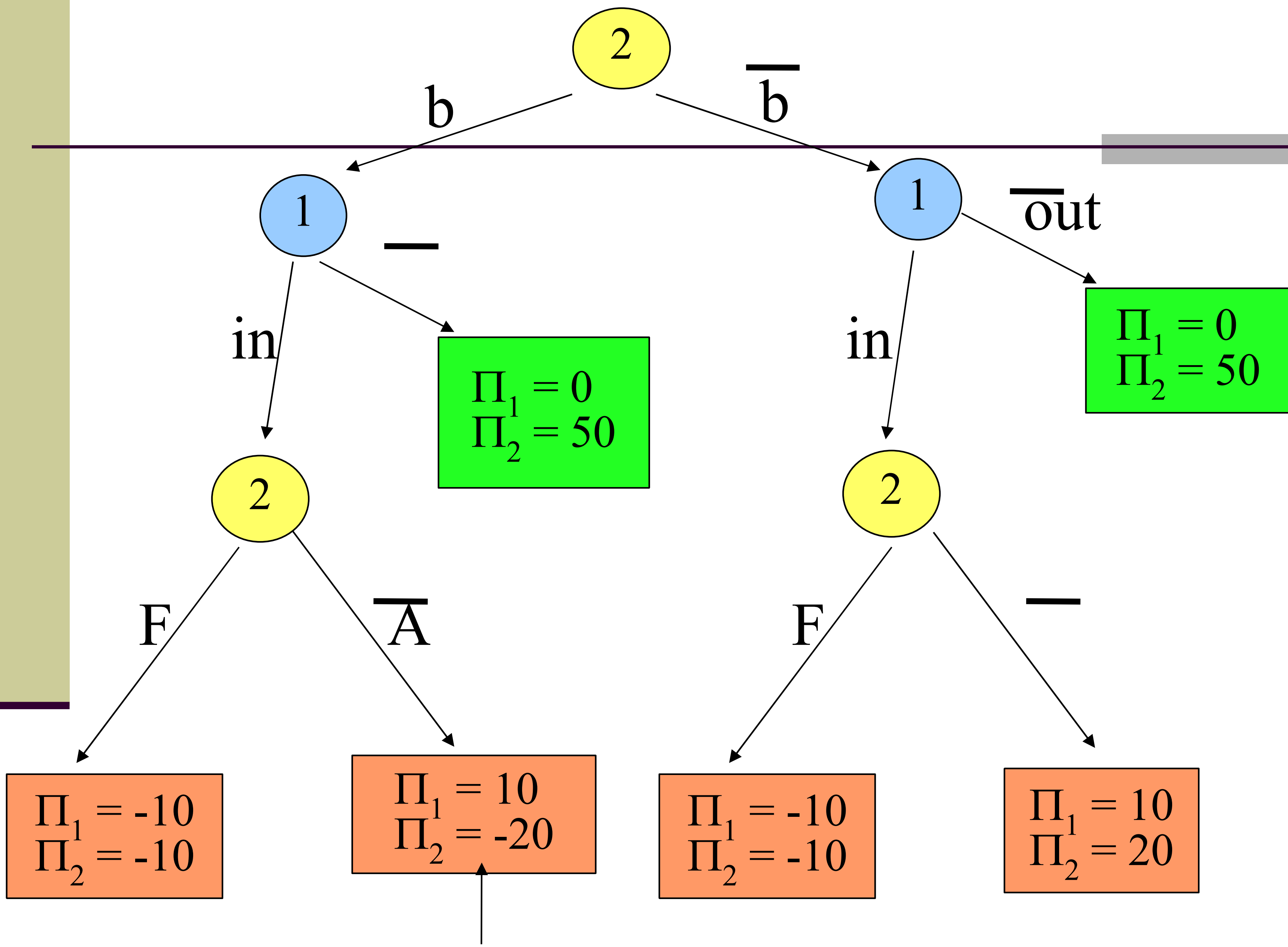
La ritorsione non è una *minaccia credibile*



Far diventare credibile la minaccia. “b” impegnarsi a fare Guerra. Se 2 Accomoda riceve una penale da una parte terza (Notaio)

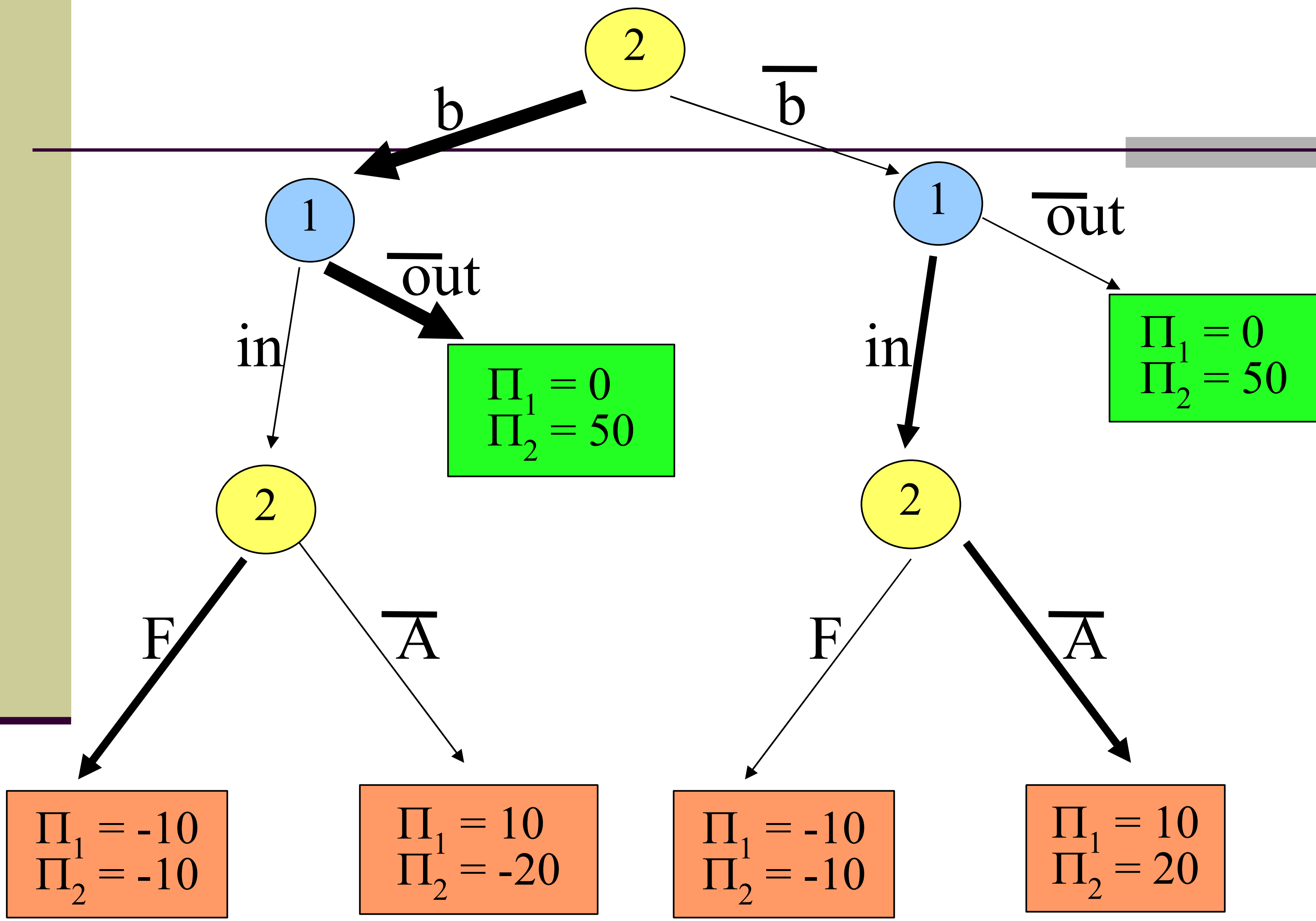


“*non b*”: $\overline{b}$ non impegnarsi a fare Guerra

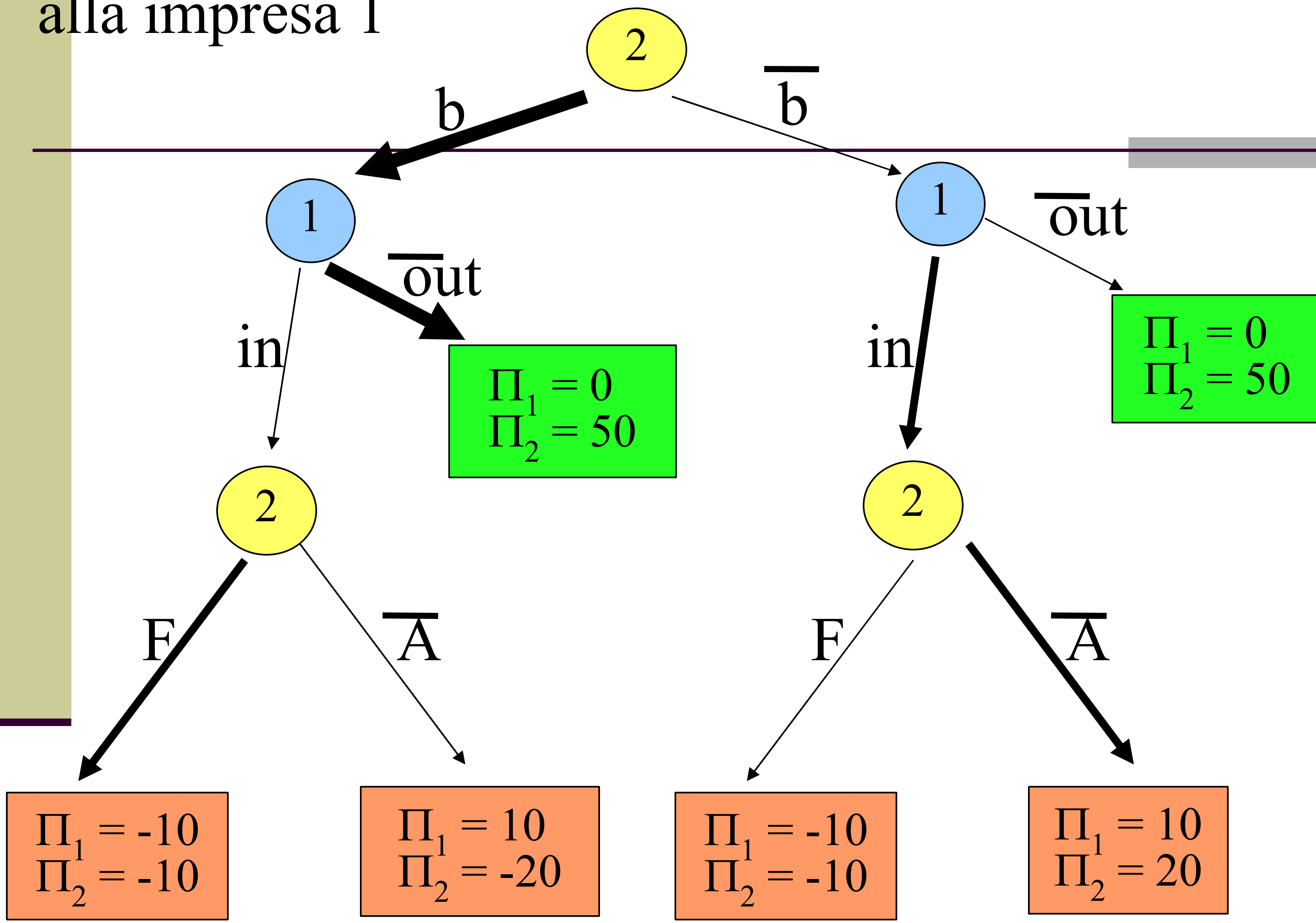


Se l'impresa 2 si impegna e non mantiene, paga una penale

Albero del gioco – soluzione con induzione a ritroso

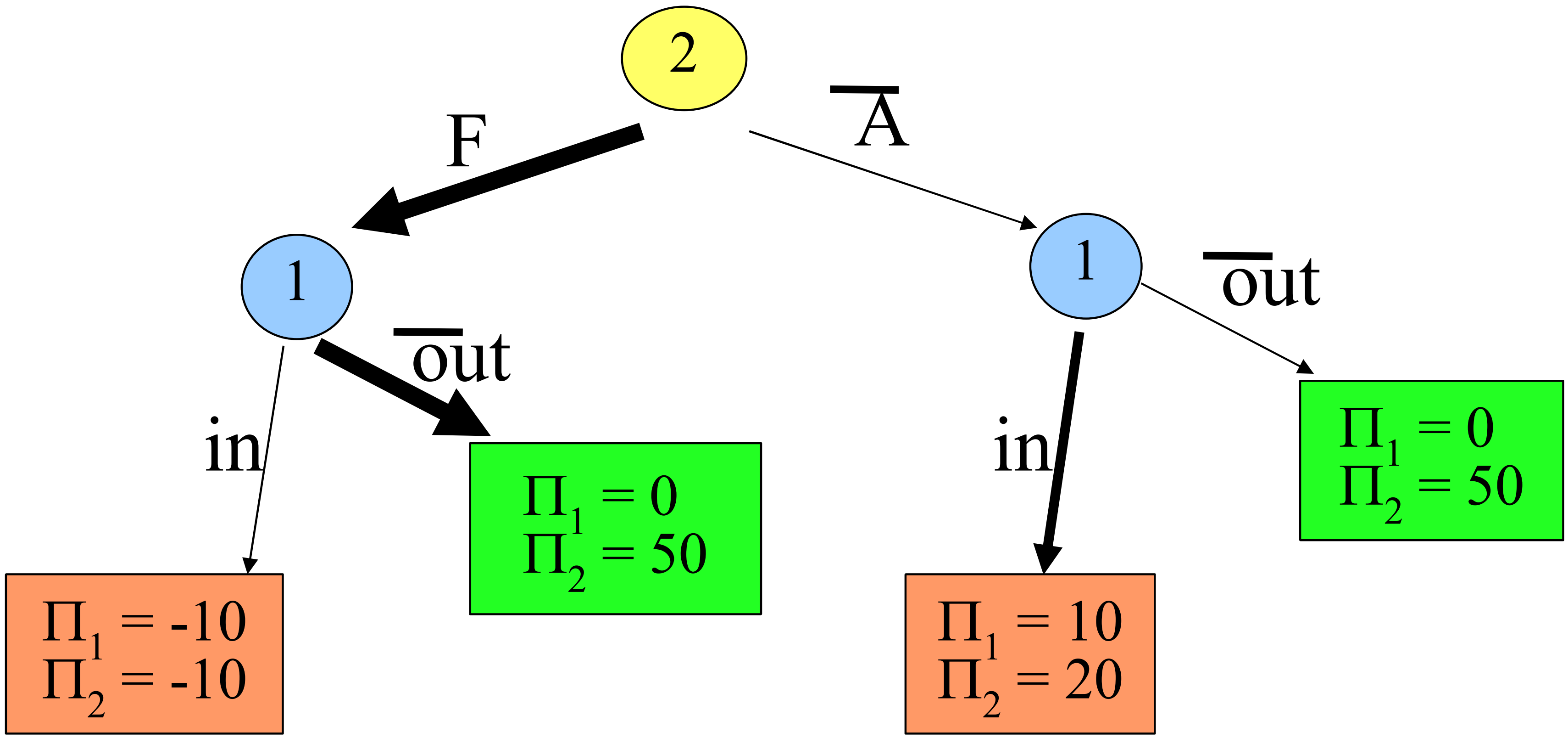


L'impresa 2 si è impegnata in modo vincolante e noto alla impresa 1



La minaccia di ritorsione è diventata credibile e "1" non entra

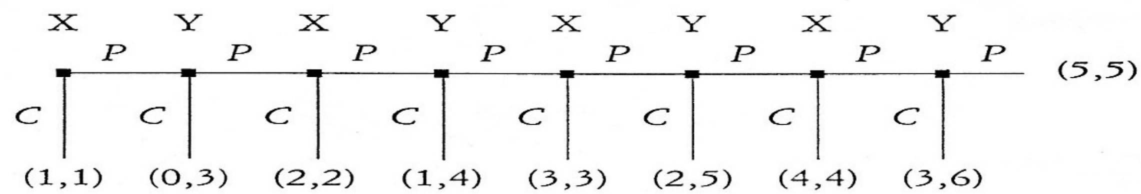
L'impegno vincolante alla ritorsione può essere presentato anche così:



La minaccia di ritorsione credibile costringe "1" a non entrare

6. Fallimento del criterio di Backward induction. Sebbene questo criterio dia dei risultati soddisfacenti, possono presentarsi casi in cui la sua applicazione conduce ad equilibri che sembrano andare contro ogni logica. L'esempio più noto è il gioco del Centipede di Rosenthal (1981).

GIOCO G.13



In corrispondenza di ogni singolo nodo,l'individuo in questione può scegliere tra "chiudere" il gioco (Mossa C) oppure "passare" la mano all'altro (Mossa P). La sequenza (virtuale) viene aperta dal giocatore X e chiusa dal giocatore Y.
I nodi dispari (giocatore X) offrono ad entrambi lo stesso payoff, definito semplicemente dalla sequenza dei numeri naturali. I nodi pari (giocatore Y) forniscono coppie di payoff così definite: se indichiamo con i la sequenza dei nodi dispari, il generico nodo pari sarà j=i+1 e la coppia di payoff associata sarà (i-1, i+1).
Se applichiamo il criterio della backward induction partendo dall'ulòtimo nodo otteniamo.....................

Ultimatum Game

- Due giocatori si accordano (in modo anonimo) per dividere tra loro un importo fisso (torta).
- P1 (proposer) offre una certa divisione della torta
- P2 (responder) decide se accettare l'offerta o rifiutare
- Se P2 accetta antrambi ottengono la parte che hanno coconrdato
- Se P2 rigetta l'offerta entrambi non ottengono nulla.

What do game theorists say?

- Ariel Rubenstein (1982)
  - ha dimostrato che esiste un'unica soluzione di equilibrio di Nash subgame perfect a questo problema D= $(\pi - \varepsilon , \varepsilon)$
- Quindi la soluzione razionale prevedeva che il proponente offrisse la quota più piccola possibile e che il rispondente l'accettasse.

I dati sperimentali non sono coerenti!!!

- Güth, Schmittberger, Schwarze (1983)
  - They did the first experimental study on this game.
  - The mean offer was 37% of the "pie"
- Da allora sono stati condotti diversi altri studi per esaminare questo divario tra esperimento e teoria.
- Quasi tutti dimostrano che gli esseri umani ignorano la soluzione razionale a favore di una qualche nozione di equità*.
- The average offers are in the region of 40-50% of the pie
  - About half of the responders reject offers below 30%