TECNICA DELLE COSTRUZIONI

IL CALCOLO ELASTICO DELLE TENSIONI NORMALI IN UNA SEZIONE IN C.A.

Prof. Ing. Carlo Pellegrino

A cura dell'ing. Paolo Zampieri

Calcolo elastico delle tensioni in una sezione in CA

In questo documento si riporta il calcolo elastico delle tensioni normali in una sezione rettangolare in calcestruzzo armato. Le ipotesi assunte sono le seguenti:

Comportamento elastico lineare del calcestruzzo e dell'acciaio;

Resistenza a trazione nulla del calcestruzzo;

Perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo;

Conservazione delle sezioni piane (andamento lineare delle deformazioni normali lungo l'altezza della sezione).

Sezione rettangolare soggetta a sforzo normale centrato

Il caso dello sforzo normale di compressione in una sezione in c.a. simmetrica:

Si faccia riferimento a una sezione rettangolare con armatura simmetrica (costituita da 4 barre longitudinali) nella quale agisce uno sforzo normale centrato di compressione.

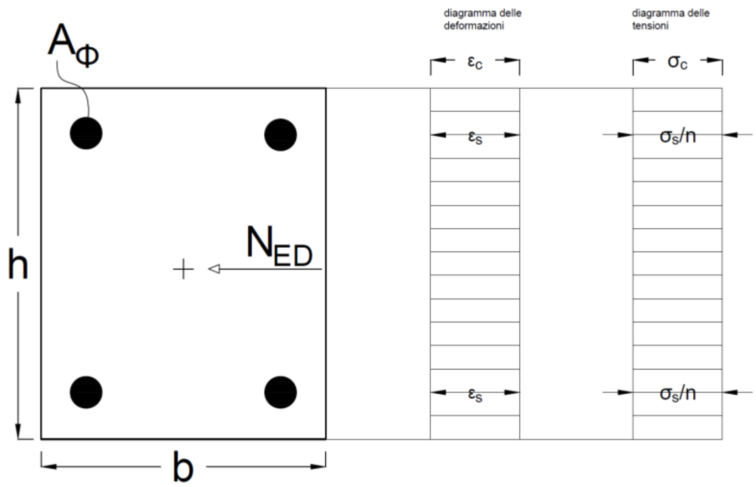

Figura 1 Sezione rettangolare in caso di sforzo normale di compressione

Poiché lo sforzo di compressione è centrato sul baricentro della sezione di calcestruzzo e l'armatura è simmetrica il diagramma delle deformazioni è costante. Inoltre, per ipotesi di perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo, in corrispondenza dell'armatura, la deformazione del calcestruzzo (ε_c) è pari alla deformazione dell'acciaio (ε_s) quindi è possibile scrivere la seguente uguaglianza:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s \tag{1}$$

Per equilibrio alla traslazione, la somma tra l'integrale delle tensioni di compressione sul calcestruzzo (N_c) e l'integrale delle tensioni sull'area di acciaio (N_s) è pari allo sforzo normale agente sulla sezione (N_{ED}):

$$N_{ED} = N_c + N_s = \sigma_c \cdot A_c + \sigma_s \cdot A_s \qquad (2)$$

Poiché vale il legame costitutivo elastico-lineare la deformazione del calcestruzzo è pari al rapporto tra la tensione del calcestruzzo e il modulo elastico del calcestruzzo (E_c):

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \qquad (3)$$

la deformazione dell'acciaio è pari al rapporto tra la tensione dell'acciaio e il modulo elastico dell'acciaio (E_s):

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \qquad (4)$$

Inserendo l'equazione (3) e l'equazione (4) nell'equazione (1) si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s} \qquad (5)$$

Dalla quale si ricava la seguente definizione di σ_s:

$$\sigma_s = \frac{E_s}{E_c} \cdot \sigma_c = n \cdot \sigma_c \qquad (5a)$$

Il parametro *n* viene definito *coefficiente di omogeneizzazione* ed è il rapporto tra il modulo elastico dell'acciaio e quello del calcestruzzo. Esso consente di trasformare l'armatura in un'area omogenea (equivalente) di calcestruzzo (n A_s). Il coefficiente di omogeneizzazione assume un valore pari a circa 7, tuttavia nelle verifiche agli stati limite di esercizio la normativa impone di usare un valore pari a 15 se si desidera effettuare un'univa verifica delle tensioni di esercizio. Tale assunzione consente di tenere in conto degli effetti della viscosità del calcestruzzo attraverso la riduzione (fittizia) del valore del modulo elastico del calcestruzzo.

Introducendo la (5a) nella (2) si ottiene:

$$N_{ED} = \sigma_c \cdot A_c + \sigma_c \cdot n \cdot A_s \qquad (6)$$

Dalla quale si ricava il valore della tensione sul calcestruzzo:

$$\sigma_c = \frac{N_{ED}}{A_c + n \cdot A_s} = \frac{N_{ED}}{A_{ci}} \qquad (6a)$$

Introducendo la (5a) nella equazione (6a) si ottiene il valore della tensione dell'acciaio:

$$\sigma_s = n \cdot \frac{N_{ED}}{A_{ci}} \qquad (6b)$$

Il caso dello sforzo normale di trazione in una sezione in c.a. simmetrica:

Si faccia riferimento a una sezione rettangolare con armatura simmetrica (costituita da 4 barre longitudinali) nella quale agisce uno sforzo normale centrato di trazione.

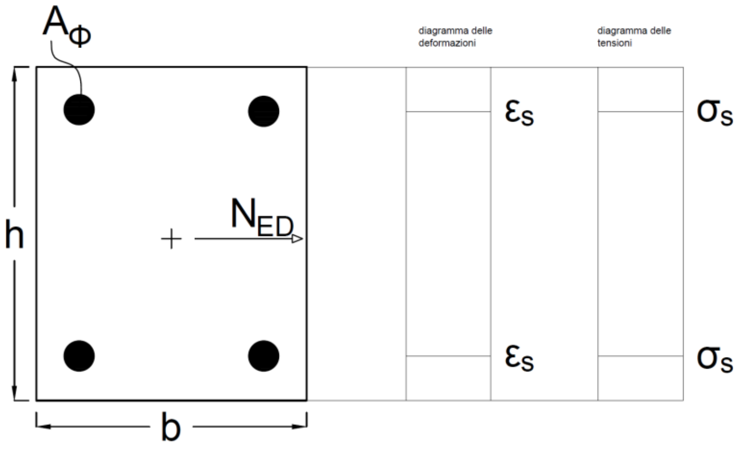

Figura 2 Sezione rettangolare in caso di sforzo normale di trazione

Per equilibrio alla traslazione lo sforzo interno di trazione agente sul baricentro dell'area di acciaio (N_s) è pari allo sforzo normale agente sulla sezione (N_{ED}) poiché vale l'ipotesi che il calcestruzzo non è resistente a trazione:

$$N_{ED} = N_s = \sigma_s \cdot A_s \tag{7}$$

Quindi:

$$\sigma_c = 0 \tag{8}$$

$$\sigma_s = \frac{N_{ED}}{A_s} \tag{8a}$$

Sezione rettangolare soggetta a flessione semplice

Nel caso di travi inflesse, cioè sollecitate a flessione e a taglio, una zona della sezione risulta essere tesa. Perciò, si fa astrazione dalla resistenza a trazione del calcestruzzo, e si dispone un'opportuna armatura longitudinale in grado di assorbire gli sforzi di trazione. Tale armatura è disposta più vicina possibile al lembo maggiormente teso della sezione tenendo presente che le armature devono avere un adeguato ricoprimento.

L'armatura si dice semplice se le barre longitudinali sono disposte solo nella zona tesa (A_s) della sezione. Invece si definisce armatura doppia se nella sezione è presente sia armatura tesa (A_s) che armatura compressa (A'_s). La sezione reagente sarà dunque caratterizzata dal calcestruzzo compresso e dalle barre d'acciaio le quali si possono sostituire con sezioni equivalenti ($n\ A'_s$) e

($n\ A_s$) di calcestruzzo. In tal modo la sezione reagente viene definita omogenea. In queste condizioni, l'asse neutro passa per l'asse baricentrico della sezione reagente.

Sezione rettangolare con sola armatura tesa soggetta a flessione semplice:

Nel calcolo di verifica sono date la larghezza b e l'altezza utile d della sezione, la sezione A_s dei ferri, ed è noto il valore del momento agente M_{ED}. Si cercano le tensioni massime sul calcestruzzo e sull'acciaio, per confrontarle con i valori di riferimento per le verifiche agli stati limite di esercizio.

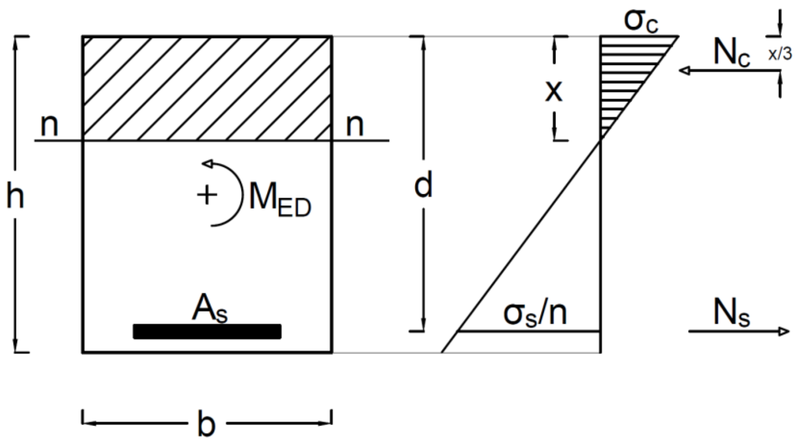

Figura 3 Sezione rettangolare in caso di flessione semplice

Anzitutto si deve determinare la posizione dell'asse neutro, ossia la sua distanza dal lembo compresso. Definita la sezione rettangolare in c.a. con armatura semplice (A_s) riportata in Figura 3, la risultante interna delle tensioni di compressione agenti sul calcestruzzo si ottiene dalla seguente relazione:

$$N_c = \int \sigma \cdot dA = \frac{x}{2} \cdot \sigma_c \cdot b \qquad (9)$$

Risultante interna degli sforzi di trazione sull'acciaio:

$$N_S = \sigma_s \cdot A_s \qquad (10)$$

Nel caso di flessione semplice dall'equazione di equilibrio alla traslazione degli sforzi interni si ottiene che:

$$N_c = N_s \qquad (11)$$

Esplicitando l'equazione di equilibrio alla traslazione si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{x}{2} \cdot \sigma_c \cdot b = \sigma_s \cdot A_s \qquad (11a)$$

Poiché il diagramma delle tensioni è lineare vale la seguente relazione:

$$\frac{\sigma_c}{x} \cdot = \frac{\sigma_s / n}{d - x} \tag{12}$$

Dalla quale si ricava:

$$\sigma_s = \frac{n \cdot (d - x)}{x} \sigma_c \tag{12a}$$

Introducendo l'equazione (12a) nella equazione (11a) si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{x}{2} \cdot \sigma_c \cdot b = \frac{n \cdot (d - x)}{x} \sigma_c \cdot A_s \tag{13}$$

$$\frac{x^2 \cdot b}{2} + n \cdot A_s \cdot x - n \cdot A_s \cdot d = 0 \tag{13a}$$

Dalla quale si ottiene il valore della profondità dell'asse neutro x:

$$x = \frac{n \cdot A_s}{b} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot d \cdot b}{n \cdot A_s}} \right) \tag{13b}$$

Nel caso di flessione semplice x può essere ricavata uguagliando a zero la sommatoria dei momenti statici rispetto all'asse neutro (*).

Noto il valore di x è possibile determinare il valore della tensione normale massima (di compressione) agente sul calcestruzzo σ_c e la tensione normale σ_s agente in corrispondenza dell'armatura A_s.

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto di applicazione della risultante delle tensioni sull'acciaio:

$$M = \frac{\sigma_c}{2} \cdot x \cdot b \cdot \left(d - x/3 \right) \tag{14}$$

Si ricava il valore della tensione σ_c:

$$\sigma_c = \frac{M}{b \cdot x/2 \cdot \left(d - x/3 \right)} \tag{14a}$$

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto di applicazione della risultante delle tensioni sul calcestruzzo:

$$M = N_S \cdot \left(d - x/3 \right) \tag{15}$$

Si ricava il valore della tensione σ_s:

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s \cdot \left(d - x/3 \right)} \tag{15a}$$

In alternativa le tensioni σ_c e σ_s si posso ricavare della formula generale della flessione (σ=Mx/J) nella quale però si introduce il momento di inerzia J_{ci} della sezione reagente omogenea. Inoltre, la tensione σ_s è *n* volte maggiore della tensione del calcestruzzo alla stessa distanza (d-x):

(*) Momento statico calcestruzzo: S_c=b x x/2; Momento statico armatura: S_s=n A_s (d-x).

$$\sigma_c = \frac{M \cdot x}{J_{ci}} \tag{16}$$

$$\sigma_s = n \cdot \frac{M \cdot (d - x)}{J_{ci}} \tag{16a}$$

Dove J_{ci} il momento di inerzia della sezione reagente omogenea è pari a:

$$J_{ci} = \frac{x^3 \cdot b}{12} + \frac{x^3 \cdot b}{4} + n \cdot A_s \cdot (d - x)^2 = \frac{x^3 \cdot b}{3} + n \cdot A_s \cdot (d - x)^2 \tag{16b}$$

Sezione rettangolare doppiamente armata soggetta a flessione semplice

Spesso si dispongono anche barre d'armatura in zona compressa anche se in tale zona l'acciaio è poco sfruttato. Tuttavia la loro presenza, può essere consigliata dalla necessità di diminuire la tensione sul calcestruzzo quando risulti troppo elevata.

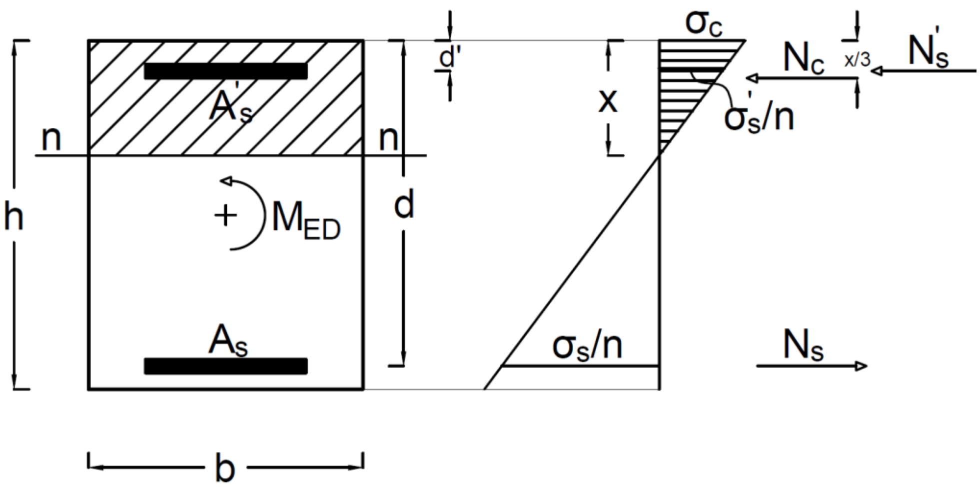

Figura 4 Sezione rettangolare doppiamente armata soggetta a flessione semplice

Definita la sezione rettangolare in c.a. con armatura doppia (A_s e A'_s) riportata in Figura 4, la risultante interna delle tensioni di compressione agenti sul calcestruzzo si ottiene dalla seguente relazione:

$$N_c = \frac{x}{2} \cdot \sigma_c \cdot b \tag{17}$$

La risultante interna degli sforzi di trazione sull'armatura tesa è pari a:

$$N_S = \sigma_s \cdot A_s \tag{17a}$$

La risultante interna degli sforzi di compressione sull'armatura compressa è pari a:

$$N'_S = \sigma'_s \cdot A'_s \tag{17b}$$

Nel caso di flessione semplice, dall'equazione di equilibrio alla traslazione degli sforzi interni si ottiene che:

$$N_c + N'_s = N_s \tag{18}$$

Esplicitando l'equazione di equilibrio alla traslazione si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{x}{2} \cdot \sigma_c \cdot b + \sigma'_s \cdot A'_s = \sigma_s \cdot A_s \tag{18a}$$

Poiché il diagramma delle tensioni è lineare valgono le seguenti proporzioni:

$$\frac{\sigma_c}{x} = \frac{\sigma_s / n}{d - x} \tag{19}$$

$$\frac{\sigma_c}{x} = \frac{\sigma'_s / n}{x - d'} \tag{19a}$$

Dalle quali si ricavano:

$$\sigma_s = \frac{n \cdot (d - x)}{x} \sigma_c \tag{20}$$

$$\sigma'_s = \frac{n \cdot (x - d')}{x} \sigma_c \tag{20a}$$

Introducendo le equazioni (20) nella equazione (18a) si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$\frac{x^2 \cdot b}{2} + n \cdot A'_s \cdot (x - d') - n \cdot A_s \cdot (d - x) = 0 \tag{21}$$

Dalla quale si ottiene il valore della posizione dell'asse neutro x:

$$x = \frac{n \cdot (A'_s + A_s)}{b} \left(-1 + \sqrt{1 + 2 \cdot b \frac{A_s \cdot d + A'_s \cdot d'}{n \cdot (A'_s + A_s)^2}} \right) \tag{22}$$

Noto il valore di x è possibile determinare il valore della tensione normale massima (di compressione) agente sul calcestruzzo σ_c, la tensione normale (di trazione) σ_s agente in corrispondenza dell'armatura A_s, e la tensione normale (di compressione) σ'_s agente in corrispondenza dell'armatura A'_s. Scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto di applicazione della risultante delle tensioni sull'acciaio si ottiene la seguente relazione:

$$M = \frac{\sigma_c}{2} \cdot x \cdot b \cdot \left(d - x/3\right) + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot \left(d - d'\right) \tag{23}$$

Dalla quale si ricava il valore della tensione σ_c:

$$\sigma_c = \frac{M}{b \cdot x/2 \cdot \left(d - x/3\right) + n \cdot A'_s \cdot \frac{x - d'}{x} \cdot \left(d - d'\right)} \tag{24}$$

dal valore di σ_c si ricava il valore della tensione σ_s:

$$\sigma_s = n \cdot \sigma_c \cdot \frac{d - x}{x} \tag{24a}$$

dal valore di σ_c si ricava il valore della tensione σ'_s:

$$\sigma'_s = n \cdot \sigma_c \cdot \frac{x - d'}{x} \tag{24b}$$

In alternativa tali valori si ottengono dalle seguenti relazioni:

$$\sigma_c = \frac{M \cdot x}{J_{ci}} \tag{25}$$

$$\sigma_s = n \cdot \frac{M \cdot \left(d - x\right)}{J_{ci}} \tag{26a}$$

$$\sigma'_s = n \cdot \frac{M \cdot \left(x - d'\right)}{J_{ci}} \tag{26a}$$

Dove J_{ci} è il momento di inerzia della sezione reagente omogenea:

$$J_{ci} = \frac{x^3 \cdot b}{3} + n \cdot A'_s \cdot \left(x - d'\right)^2 + n \cdot A_s \cdot \left(d - x\right)^2 \tag{27}$$

Sezione rettangolare soggetta a presso-flessione semplice

Le sezioni in c.a. presso-inflesse sono soggette a flessione, a compressione (ed eventualmente a taglio). La presenza della componente normale N fa sì che l'asse neutro non sia più baricentrico e che (in generale) non valga la sovrapposizione degli effetti. In generale, non si può sommare il contributo tensionale dato da N e quello dato da M ad eccezione che l'eccentricità dello sforzo normale sia piccola ed N cada all'interno del nocciolo centrale di inerzia.

Sezione rettangolare non armatura soggetta a presso-flessione:

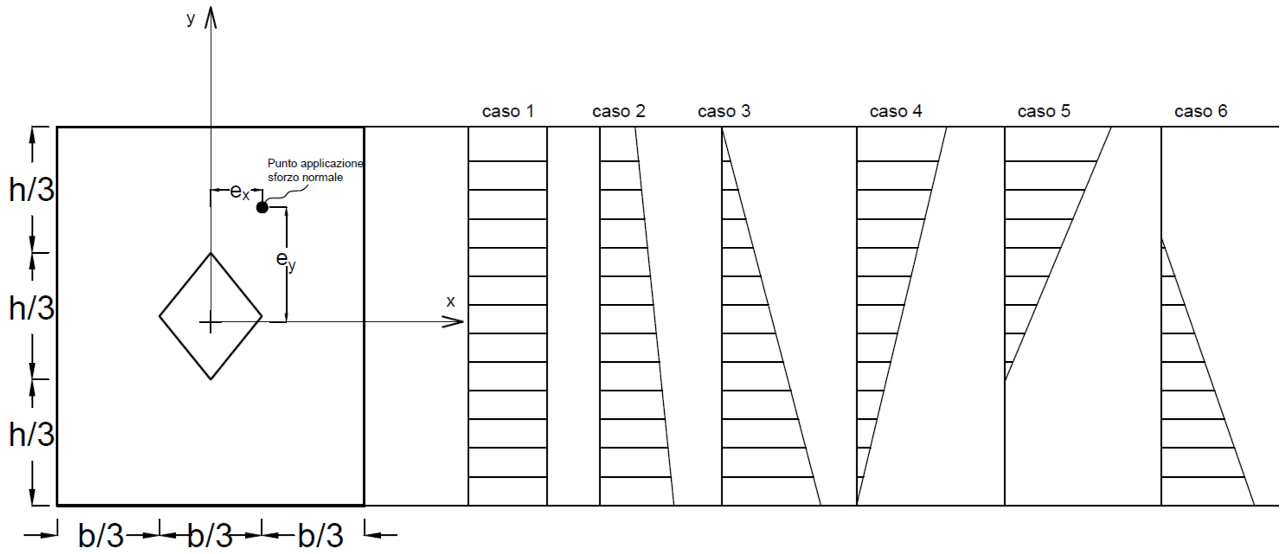

Figura 5 Sezione rettangolare non armata soggetta presso-flessione

Definita la sezione rettangolare di calcestruzzo non armata come riportato in Figura 5, essa è soggetta a uno stato di sollecitazione di presso-flessione se lo sforzo nomale di compressione ha un punto di applicazione che non coincide con il baricentro della sezione. È possibile definire la posizione del punto di applicazione dello sforzo normale noti i valori dell'eccentricità dello sforzo normale rispetto agli assi di riferimento (x, y). In particolare se l'eccentricità rispetto all'asse y (e_x) e l'eccentricità rispetto all'asse x (e_y) sono entrambe diverse da zero la sezione sarà soggetta a presso-flessione deviata e nella sezione saranno agenti i seguenti parametri della sollecitazione:

N sforzo normale;

$M_x = N\, e_y$ momento flettente attorno all'asse x

$M_y = N\, e_x$ momento flettente attorno all'asse y.

Se e_x=0 e e_y=e è diversa da zero la sezione è soggetta a presso-flessione semplice e nella sezione saranno agenti i seguenti parametri della sollecitazione:

N sforzo normale;

$M = N\, e$ momento flettente.

Nell'ipotesi di presso-flessione semplice, facendo riferimento ai 6 digrammi delle tensioni normali riportati in Figura 5 si possono definire i seguenti casi:

Caso 1) e=0

Caso 2) 0<e<h/6

Caso 3) e=-h/6

Caso 4) e=h/6

Caso 5) e>h/6

Caso 6) e<-h/6

Calcolo elastico delle tensioni sul terreno alla base di un plinto a pianta quadrata:

Il calcolo elastico delle tensioni del terreno sulla base di un plinto a base quadrata è del tutto analogo al calcolo delle tensioni normali in una sezione di calcestruzzo non armata. Definito un plinto a base quadrata, come riportato in Figura 6, si possono distinguere 3 condizioni significative (Figura 7) per il calcolo delle tensioni del terreno.

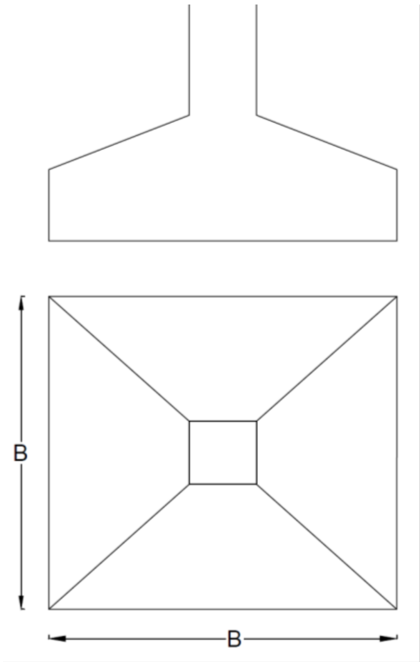

Figura 6 Il plinto a pianta quadrata

Nel primo caso riportato in Figura 7 lo sforzo nomale è centrato sul baricentro del plinto e quindi la tensione sul terreno sarà pari a:

$$\sigma_t = \frac{N}{B^2} \tag{28}$$

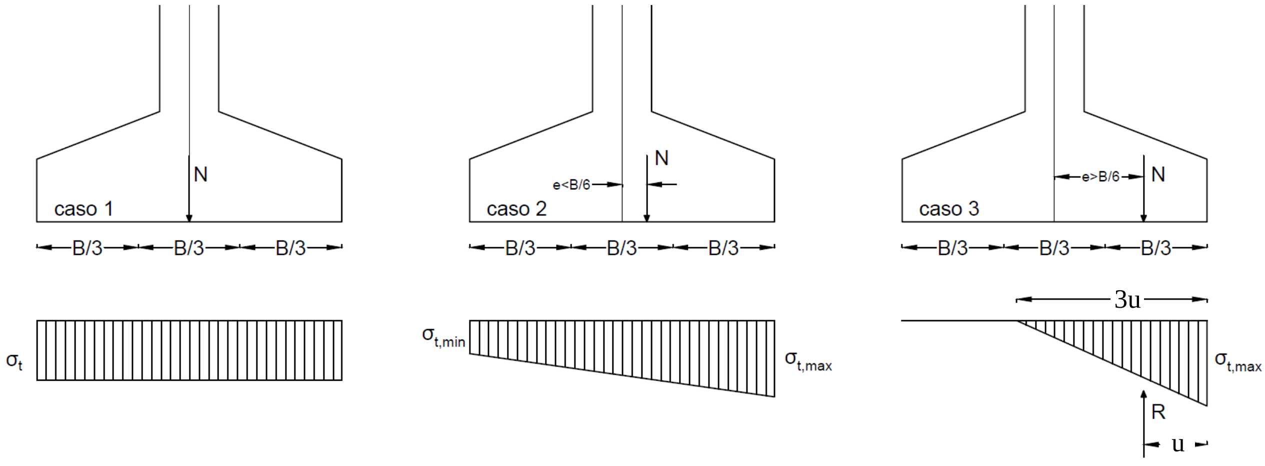

Figura 7 Calcolo elastico della tensione sulla basa del plinto (tre casi significativi)

Nel secondo caso riportato in Figura 7 lo sforzo nomale ha un'eccentricità inferiore a B/6 dunque vale la formula di Navier e la distribuzione delle tensioni sul terreno alla base del plinto è trapezoidale. I due valori significativi della tensione agente sul terreno si ricavano come segue:

$$\sigma_{t,\max} = \frac{N}{B^2} + \frac{M}{\frac{B^3}{6}} \tag{29}$$

$$\sigma_{t,\min} = \frac{N}{B^2} - \frac{M}{\frac{B^3}{6}} \tag{30}$$

Nel terzo caso riportato in Figura 7 lo sforzo nomale ha un'eccentricità maggiore a B/6 dunque non vale la formula di Navier, la sezione è parzializzata e la distribuzione delle tensioni sul terreno è triangolare. Il valore massimo della tensione agente sul terreno si ricava come segue:

$$\sigma_{t,\max} = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot u} \tag{31}$$

Sezione rettangolare armatura soggetta a presso-flessione:

In questo caso la presenza dello sforzo normale fa sì che l'asse neutro sia l'antipolare del centro di pressione dell'elissi d'inerzia della sezione. Se l'eccentricità dello sforzo normale è piccola e il punto di applicazione dello sforzo normale cade all'interno del nocciolo d'inerzia (Figura 8) vale la formula di Navier e le tensioni sul calcestruzzo si possono calcolare come segue:

$$\sigma_c(y) = \frac{N}{A_{ci}} + \frac{M \cdot y}{J_{ci}} \tag{32}$$

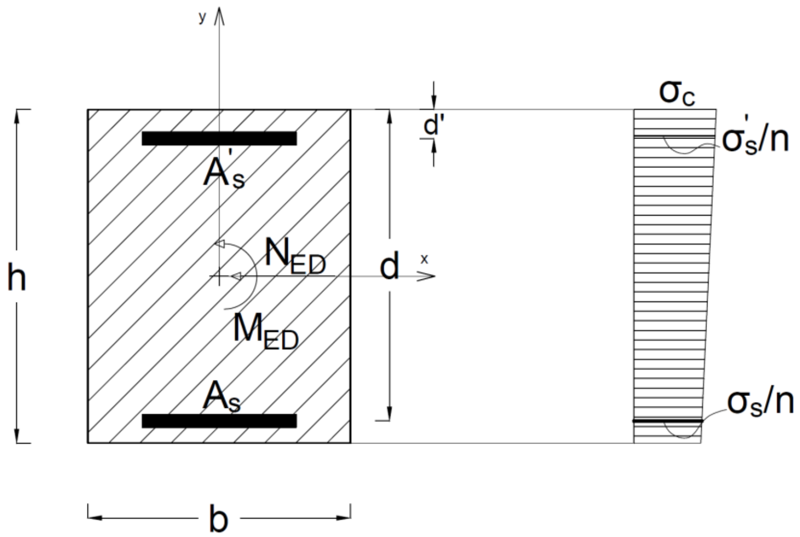

Figura 8 Sezione rettangolare armata soggetta presso-flessione (lo sforzo normale è applicato all'interno del nocciolo d'inerzia)

Se il punto di applicazione dello sforzo normale cade invece fuori dal nocciolo centrale di inerzia della sezione l'asse neutro taglia la sezione e non è più valida la formula di Navier (32).

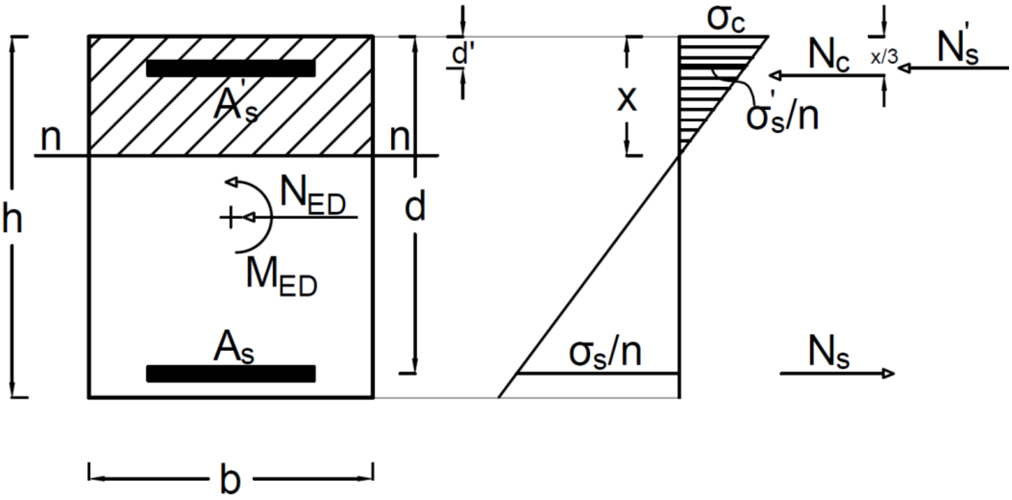

Figura 9 Sezione rettangolare armata soggetta presso-flessione (lo sforzo normale è applicato all'esterno del nocciolo d'inerzia)

Facendo riferimento alla condizione riportata in Figura 10, dove lo sforzo normale di compressione cade all'esterno della sezione, è possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione degli sforzi interni alla sezione:

$$N_{ED} = N_c + N'_s + N_s \tag{33}$$

E l'equilibrio alla rotazione degli sforzi interni rispetto al punto di applicazione dello sforzo normale:

$$0 = \frac{\sigma_c \cdot b \cdot x}{2}\left(\frac{x}{3}+a\right)+\sigma'_s \cdot A'_s \cdot \left(d'+a\right)-\sigma_s \cdot A_s \cdot \left(d+a\right) \tag{34}$$

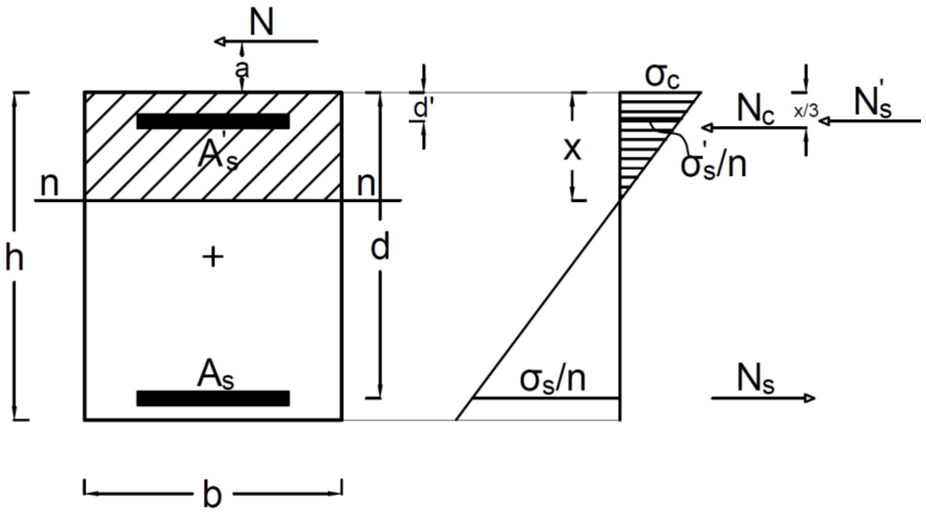

Figura 10 Sezione rettangolare armata soggetta presso-flessione (lo sforzo normale è applicato all'esterno della sezione)

Anche in questo caso, poiché l'andamento delle tensioni normali sulla sezione è lineare, sono valide le equazioni (20) che introdotte nella equazione (34) danno origine alla seguente equazione:

$$\frac{b\cdot x}{2}\cdot\left(\frac{x}{3}+a\right)+n\cdot A'_s\cdot\left(\frac{x-d'}{x}\right)\cdot\left(d'+a\right)-n\cdot A_s\cdot\left(\frac{d-x}{x}\right)\cdot\left(d+a\right)=0 \tag{34a}$$

$$x^3\cdot\frac{b}{6}+x^2\cdot\frac{b\cdot a}{2}+n\cdot\left[A_s\cdot\left(a+d\right)+A'_s\cdot\left(a+d'\right)\right]\cdot x-n\cdot\left[A_s\cdot d\cdot\left(a+d\right)+A'_s\cdot d'\cdot\left(a+d'\right)\right]=0 \tag{34b}$$

Noto il valore di x è possibile determinare il valore della tensione normale massima (di compressione) agente sul calcestruzzo σ_c, la tensione normale (di trazione) σ_s agente in corrispondenza dell'armatura A_s, e la tensione normale (di compressione) σ'_s agente in corrispondenza dell'armatura A'_s. Scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto di applicazione della risultante delle tensioni sull'acciaio si ottiene la seguente relazione

$$N\cdot\left(a+d\right)=\frac{\sigma_c}{2}\cdot x\cdot b\cdot\left(d-x/3\right)+\sigma'_s\cdot A'_s\cdot\left(d-d'\right) \tag{35}$$

dalla quale si ricava il valore della tensione σ_c:

$$\sigma_c=\frac{N\cdot\left(a+d\right)}{b\cdot x/2\cdot\left(d-x/3\right)+n\cdot A'_s\cdot\frac{x-d'}{x}\cdot\left(d-d'\right)} \tag{36}$$

dal valore di σ_c si ricava il valore della tensione σ_s:

$$\sigma_s=n\cdot\sigma_c\cdot\frac{d-x}{x} \tag{36a}$$

dal valore di σ_c si ricava il valore della tensione σ'_s:

$$\sigma'_s=n\cdot\sigma_c\cdot\frac{x-d'}{x} \tag{36b}$$