

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Fluidodinamica

I fluidi



Un corpo solido ha una forma propria

Un fluido assume la forma del recipiente che lo contiene

LIQUIDO

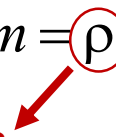
- volume definito
- superficie limite
- incompressibile
- densità $\sim 10^3 \text{ kg/m}^3$

GAS

- tende a occupare tutto il volume disponibile
- compressibile
- bassa densità (aria 1.3 kg/m^3)

Un fluido è un sistema continuo: $dm = \rho dV$

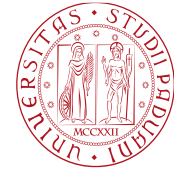
densità



Un elemento del fluido può scorrere:

- rispetto ad un elemento adiacente
- rispetto alla parete del recipiente

Forze applicate ad un fluido



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

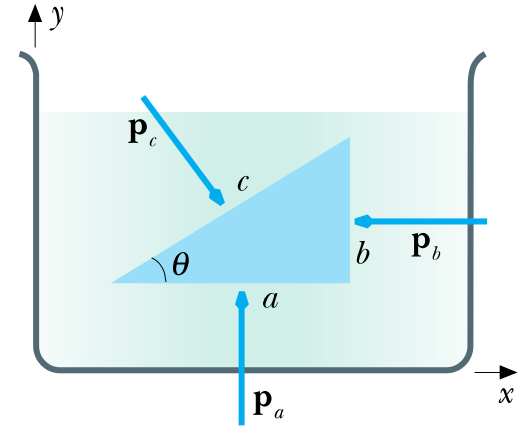
Forze di volume: proporzionali a dV

Esempio: forza peso: $d\vec{F} = \vec{g} dm = \vec{g} \rho dV$

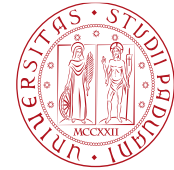
Forze di superficie: proporzionali a dS

$$p = \frac{dF}{dS} \quad \text{pressione}$$

Viscosità: forza di attrito interna



In un fluido in quiete le forze tra gli elementi sono ortogonali alla superficie di separazione.



Pressione in un fluido

PRESSIONE: rapporto tra la forza e la superficie su cui agisce la forza

In un fluido la pressione è una grandezza scalare il suo valore in un dato punto del fluido **non dipende dall'orientazione di S**

$$p = \frac{F}{S}$$

La forza può essere applicata sulla superficie libera e/o dalle pareti del recipiente

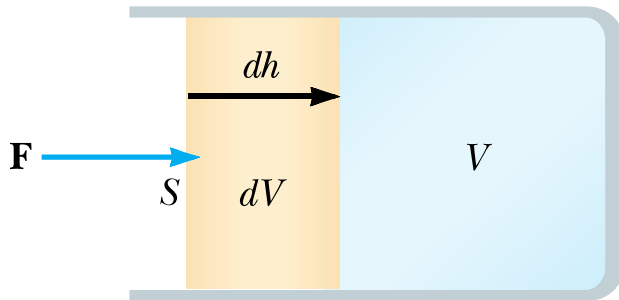
unità di misura: $[p] = [F]/[S] = N / m^2 = \text{Pa}$ (pascal)

altra unità: 1 bar = 10^5 Pa

1 torr = 1 mm Hg = 1/760 atm (=133.3 Pa)

Valore standard della pressione atmosferica: $p_{atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Il lavoro per una pressione



$$dW = Fdh = pdV$$

La superficie S a cui è applicata la forza F si sposta di dh

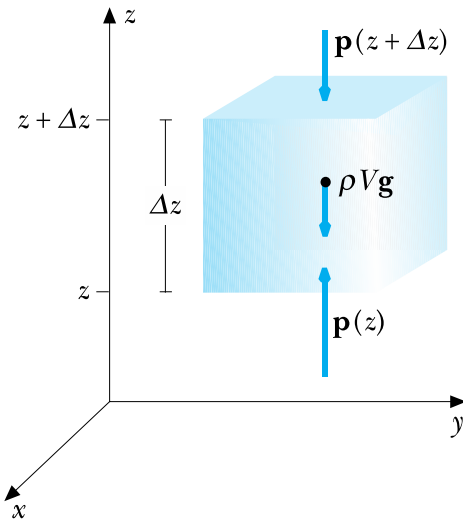
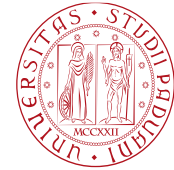
$$dW = F dh = p S dh = p dV$$

$$W = \int p dV$$

Il lavoro della forza provoca una variazione di volume

La variazione di volume di un solido o un liquido è trascurabile ma in un gas è importante.

Equilibrio



Sull'asse z agiscono:

1) una forza di volume

$$F_z^V = f_z dm = f_z \rho dV$$

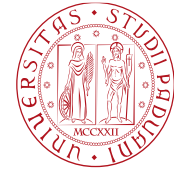
f_z : forza per unità di massa

2) due forze di superficie dovute agli elementi di fluido che stanno sopra e sotto

$$\begin{aligned} F_z^S &= p(z) dS - p(z + dz) dS \\ &= -(p(z + dz) - p(z)) dS \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} dz dS \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} dV \end{aligned}$$

dove dS è la superficie laterale del cubo

Equilibrio



$$-\frac{\partial p}{\partial z} dV = f_z \rho dV = g \rho dV$$

La pressione varia solo lungo z e aumenta nel verso di g .

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \longrightarrow \quad dp = -\rho g dz$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

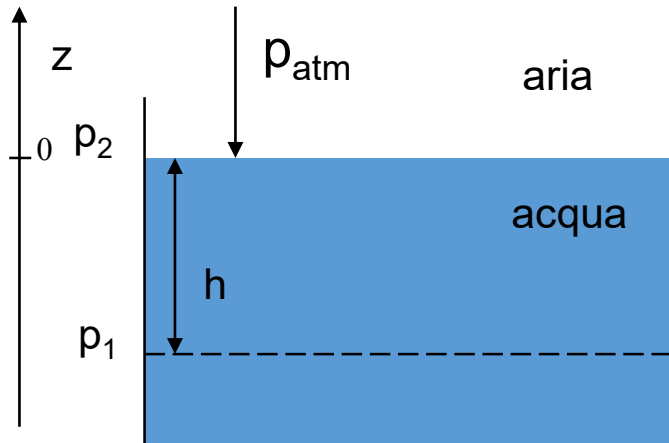
se la densità è costante



$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

Legge di Stevino

Principio di Pascal



$$p_1 = p(h)$$

$$z_2 - z_1 = h$$

$$p_2 = p_{atm}$$

$$p_2 - p_1 = p_{atm} - p(-h) = -\rho g(z_2 - z_1) = -\rho g h$$

$$p(-h) = p_{atm} + \rho g h = p_{atm} + 9.8 \cdot 10^3 h$$

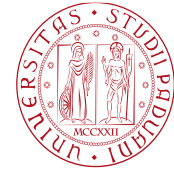
Ogni metro la pressione aumenta di $\Delta p = 10^4 Pa = 0.1 bar$

$$p(z) = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

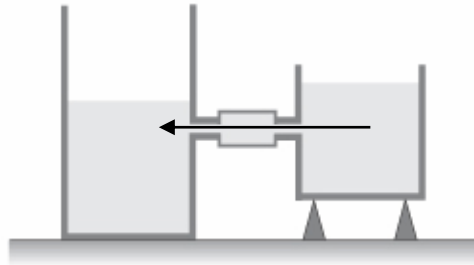
$$p_0 = p(z_0)$$

Principio di Pascal: una variazione di pressione esterna da luogo a una variazione uguale di pressione in tutto il fluido

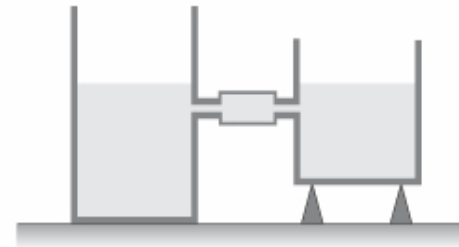
Vasi comunicanti



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



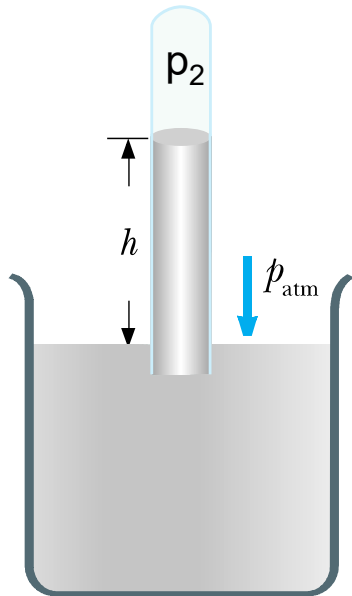
non equilibrio



equilibrio

Si crea un flusso da destra a sinistra, in accordo con la legge di Stevino alla stessa profondità le pressioni devono essere identiche.

Misura di pressione



Barometro di Torricelli: misura della pressione atmosferica

Si riempie il tubo con mercurio senza fare entrare l'aria

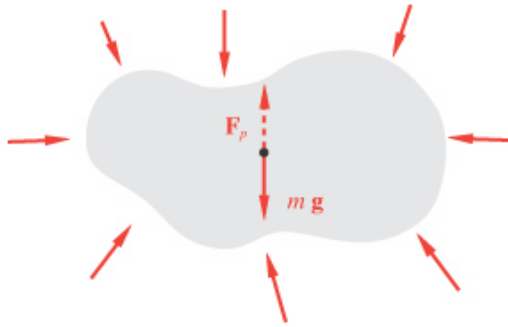
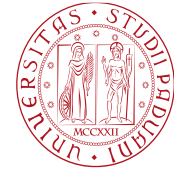
Nel ramo chiuso agisce solo la pressione dei vapori di mercurio che hanno bassissima densità, la colonna di mercurio misura la pressione atmosferica

$$p_1 = p_{atm}$$

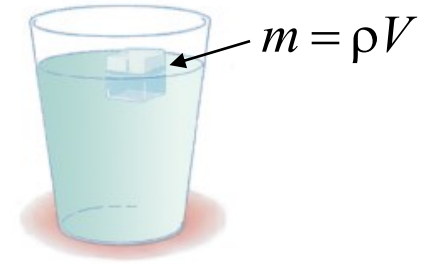
$$p_2 \cong 0$$

$$p_1 - p_2 = p_{atm} = \rho gh \quad \longrightarrow \quad h = 0.76 \text{ m}$$

Principio di Archimede



In un volume V qualsiasi del fluido,
la risultante delle forze di pressione
equilibrano il suo peso

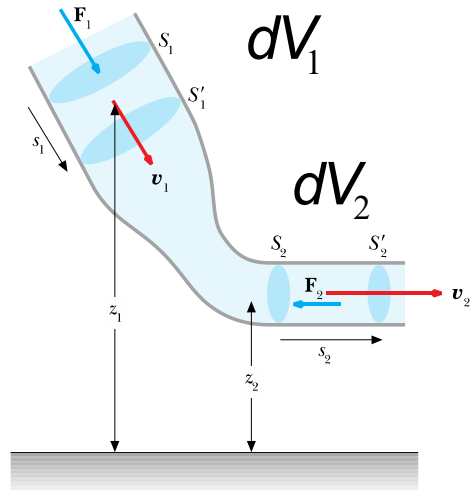


$$\vec{F}_V + \vec{F}_p = m\vec{g} + \vec{F}_p = 0 \Rightarrow \vec{F}_p = -m\vec{g}$$

Sostituendo alla massa m , una massa m' di uguale volume $V \rightarrow m' = \rho' V$

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto
pari al peso del volume di fluido spostato

Teorema di Bernoulli



Ricaviamo la relazione tra la velocità e la pressione del fluido nelle diverse sezioni del condotto.

Consideriamo il volume di fluido compreso tra S_1 e S_2

Il volume di fluido dV_1 che attraversa S_1 nell'unità di tempo è uguale al volume dV_2 che attraversa S_2 (incompressibilità) $dV_1 = dV_2 = dV$

Le forze agenti sul volume dV sono il peso e le forze di pressione.

Il lavoro della forza peso è: $dW = -dE_p = -dm g (z_2 - z_1) = -\rho dV g (z_2 - z_1)$

Le forze di pressione delle pareti del condotto non fanno lavoro (ortogonali allo spostamento)

Le forze di pressione F_1 e F_2 fanno lavoro:

$$\begin{aligned} dW_p &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2 \\ &= p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = (p_1 - p_2) dV \end{aligned}$$

Teorema di Bernoulli



La variazione dell' energia cinetica è: $dE_k = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$

$$dW + dW_p = -\rho dV g(z_2 - z_1) + (p_1 - p_2)dV$$

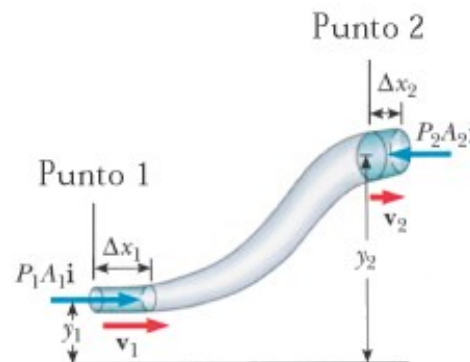
$$= dE_k = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$



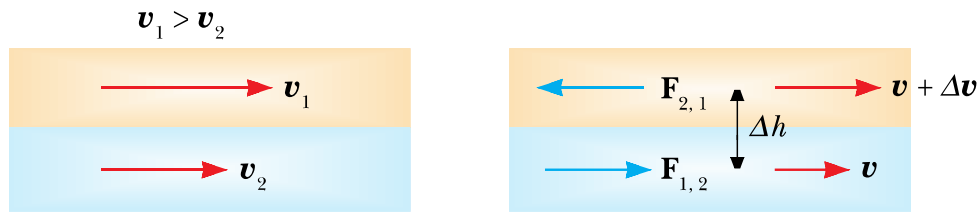
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

Teorema di Bernoulli



Viscosità



Se c'è scorrimento tra due elementi di un fluido compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito, detta **forza di attrito interno**:

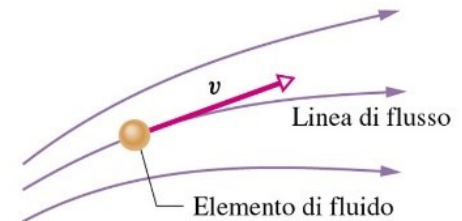
- **Direzione** tangenziale
- **Verso** contrario a quello della velocità relativa (principio di azione e reazione).
- **Modulo** descrivibile sperimentalmente dalla relazione:

$$F = \eta S \frac{v}{h}$$

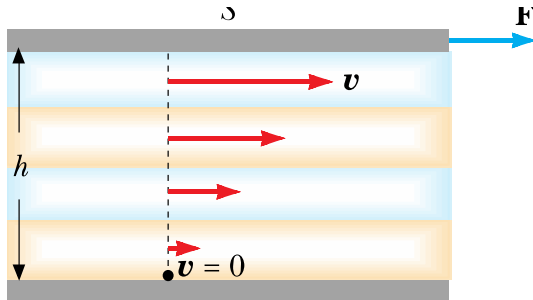
dove S è l'area di contatto e η è la **viscosità del fluido**

$$[\eta] = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1} = 10 \text{ poise}$$

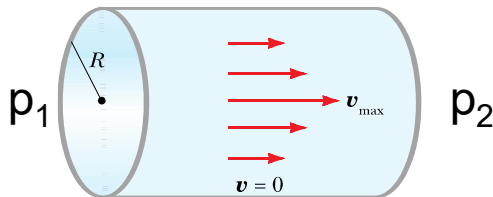
- **Fluidi perfetti**, ovvero non viscosi e incompressibili (e quindi con densità che non varia, ovvero costante nel tempo e nello spazio).
- **Linee di corrente** (o a volte linee di flusso): sono le traiettorie descritte dagli elementi di fluido (in ogni punto la velocità risulta tangente alla linea di corrente).



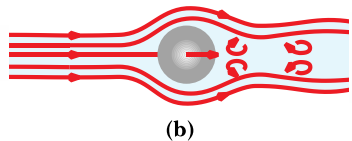
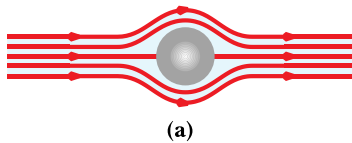
Viscosità



Sperimentalmente si osserva $F = \eta S \frac{v}{h}$



Si ricava $v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$



Legge di Stokes

$$F_{res} = -6\pi\eta Rv$$

Sfera in regime
laminare