Lezione 13 (29/11/23)

Riassunto dei metodi per risolvere
$$Ax = b$$

diretti : MEG $\equiv$ LU,
↳ attraverso le matrici elementari di Gauss.

Cholesky $A = A^T$ e def +
$$A = HH^T \qquad H = \left(\triangle\right)$$

$$A = QR \quad o \quad A = \underbrace{UWV^T}_{\text{SVD di } A}$$

↳ Householder (Givens)

iterativi $x^{(k+1)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ \text{d'iterazione}}}{P} x^{(k)} + q$

$A = M - N$ $\quad$ M facilmente invertibile (ovviamente $|M| \neq 0$)

- Jacobi
- SOR è una famiglia di metodi che dipendono da un parametro di accelerazione, ω $0 < \omega < 2$

quando $\omega = 1$ si ottiene il

metodo di GAUSS-SEIDEL

NB I metodi iterativi generalizzano al caso vettoriale i metodi iterativi per la ricerca di zeri di funzione.

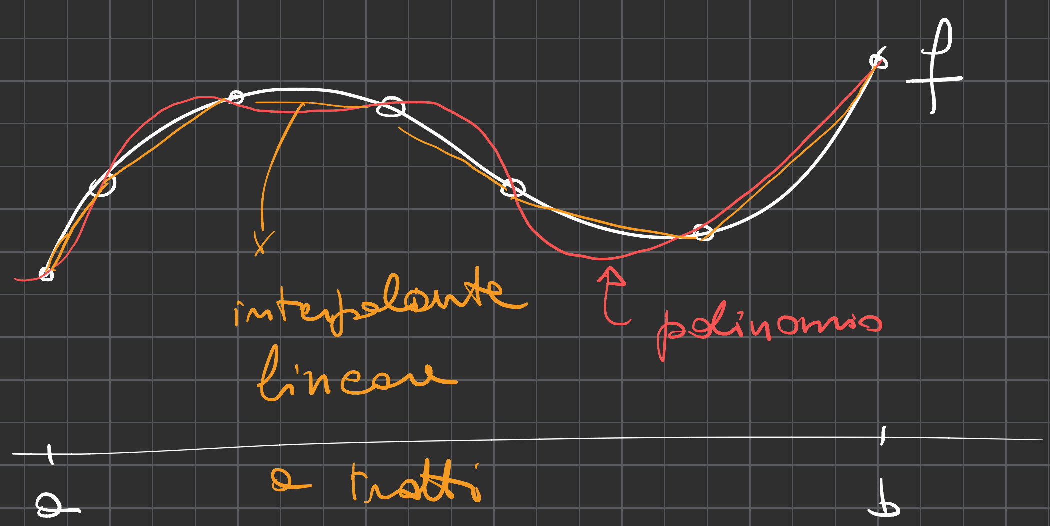
La cosa importante per la convergenza è

$$\rho(P) < 1$$

$\hookrightarrow \max |\lambda_i| < 1$

autovalori di P (non di A!)

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE di funzioni e dati



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{grado} \le n}}{P_n}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Condizioni d'interpolazione

$$P_n(x_i) = \underbrace{f(x_i)}_{f_i} \qquad i = \underbrace{0, \dots, n}_{n+1}$$

esplicitiamo

x_i = nodi d'interpolaz.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f_n \end{cases} \qquad (1)$$

è un sistema lineare con matrice

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

matrice di Vandermonde V

<u>Teorema</u> Se $x_i \neq x_j \quad \forall\, i \neq j$, $i, j = 0, \dots, n$ allora la soluzione del sistema (1) esiste ed è unica

Dim   Deriva dal fatto che

$\det V \neq 0$ perché abbiamo visto

che $\det V = \prod_{\substack{i>j \\ i,j=0}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$

appunto se $x_i \neq x_j$ #

Alternativamente siano p_n e q_n

due polinomi distinti che interpolano

$(x_i, f_i) \quad i=0,\dots,n$

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$q_n(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

$$d_n(x) = p_n(x) - q_n(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n$$

d_n si annulla negli $n+1$ punti

$x_0, \dots, x_n$

Ma un polinomio di grado n che si annulla in $n+1$ punti distinti è il polinomio nullo

$\Longrightarrow$ $p_n(x) = q_n(x)$

contraddicendo l'ipotesi

Osservazione

$$V\bar{a} = \bar{f} \qquad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

supponiamo che V è mal condizionata

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Quindi succederà che

$$\bar{a} = V^{-1}\bar{f}$$

è un sistema mal condizionato

Perché? Una risposta sta nella base dei monomi in cui andiamo a costruire il polinomio d'interpolazione

$\mathcal{M} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base per lo spazio dei polinomi di grado n.

$V\bar{a} = \bar{f}$ se invece che V avessimo una matrice Identità

$I\bar{a} = \bar{f}$ allora avremo

immediatamente che

$$a_i = f_i \quad \forall i$$

Esiste un'altra base polinomiale che mi permetta di ottenere la soluzione in maniera più stabile?

Risposta: sì, base di LAGRANGE

Il polinomio d'interpolazione si può costruire usando i polinomi elementari di Lagrange

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad i=0,\dots,n$$

PROPRIETÀ

- $l_i(x_i) = 1 \qquad l_i(x_j) = 0 \quad j\neq i \qquad \left(l_i(x_j) = \delta_{ij} \right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad a_i = f_i \quad \forall i$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f_i \qquad (2)$$

Polinomio d'interpolazione in forma di Lagrange

$$P_n(x_i) = \underbrace{l_i(x_i)}_{1} f_i = f_i \qquad \forall i$$

ogni l_i è un polinomio di grado n e l_i sono una base dei polinomi.

Posso passare dalla base monomiale alla base di Lagrange come segue

$$\begin{pmatrix} & & \\ & V & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_0(x) \\ \vdots \\ l_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

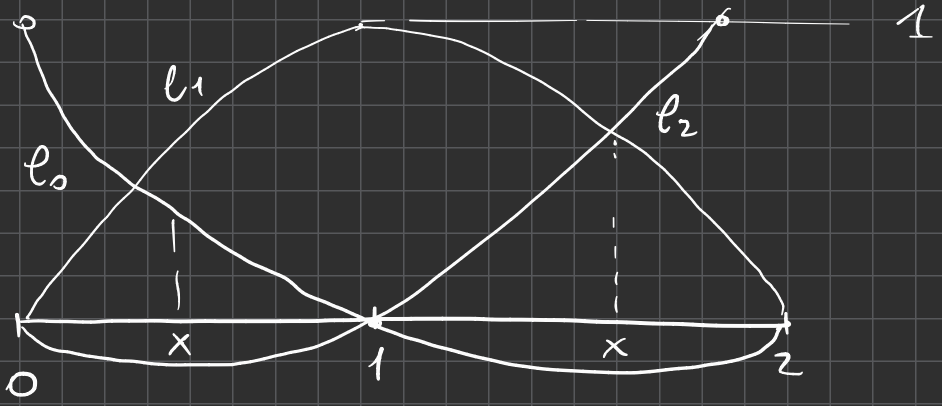
Esempio

$$X = \{0, 1, 2\}$$

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-2} = x(2-x)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$



$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) \cdot 1}_{\text{polinomio interpolante la}} = 1 \qquad \forall x}$$

funzione $f \equiv 1$

$$\ell_0(x) = \ell_2(2-x)$$

simmetria della base di Lagrange su <u>nodi</u> <u>equispaziati</u>

Consideriamo $n = 1$

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1) \qquad p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Il sistema di Vandermonde corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{pmatrix} x_1 f_0 - x_0 f_1 \\ -f_0 + f_1 \end{pmatrix}$$

$$p_1(x) = \underbrace{\frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0}}_{a_0} + \underbrace{\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}_{a_1} \cdot x$$

evidenziamo f_0 e f_1

$$p_1(x) = f_0 \cdot \underbrace{\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}}_{l_0(x)} + f_1 \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{l_1(x)}$$

$\Rightarrow$ Il polinomio in forma di Lagrange è un altro modo per scrivere il polinomio interpolante

Nel caso di punti equispaziati

$$x_i = x_0 + i h \qquad h = x_i - x_{i-1}$$

$$i = 0, \dots, n$$

$$x(t) = x_0 + t h \qquad t = 0, \dots, n$$

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\cancel{x_0} + th - \cancel{x_0} - jh}{\cancel{x_0} + ih - \cancel{x_0} - jh}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j} = \frac{\prod_{j=0}^{n} (t-j)}{\prod_{j=0}^{n} (i-j)} \quad j \neq i$$

Detta ora $\omega_{n+1}(t) = \underbrace{t(t-1)\dots(t-n)}_{\text{polinomio di grado } n+1}$

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} t-j = \frac{\omega_{n+1}(t)}{t-i}$$

numeratore di $l_i(t)$

$$\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{n} i-j = \prod_{j=0}^{i-1} (i-j) \cdot \prod_{j=i+1}^{n} (i-j)$$

$$= (-1)^{n-i} \, i! \, (n-i)!$$

denominatore di $l_i(t)$

Allora

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i(t) f_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(t)}{(t-i)} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} f_i$$

$$= \frac{\omega_{n+1}(t)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{f_i}{t-i}$$

ERRORE D' INTERPOLAZIONE

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

errore puntuale

$\forall\, x \in [a,b]$ ← intervallo d'interpolazione

TEOREMA

Se $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ allora

$$r_n(x) = \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}_{\text{funzione nodale}} \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$\xi_x \in (a,b)$ e x_i distinti

Dim

- $x = x_i$ l'errore è nullo

$$r_n(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$$

- $x \neq x_i$. Sia $t \in I_x$ con I_x più piccolo intervallo che contiene $x_0, \dots, x_n, x$.

Consideriamo la funzione

$$g(t) = r_n(t) - \frac{\omega_n(t)\, r_n(x)}{\omega_n(x)}$$

Perché $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$ anche $g \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$

g ha $n+2$ zeri, $\underbrace{x_0, \dots, x_n, x}$

$$g(x_i) = r_n(x_i) - \frac{\omega_n(x_i)\, r_n(x)}{\omega_n(x)} = 0$$

$$g(x) = r_n(x) - \frac{\cancel{\omega_n(x)}\, r_n(x)}{\cancel{\omega_n(x)}} = 0$$

Per Rolle, g' ha $n+1$ zeri

e $g^{(n+1)}$ ha 1 zero, ξ

$$r_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$$

$$\omega_n^{(n+1)}(t) = (n+1)!$$

Quindi

$$g^{(n+1)}(t) = r_n^{(n+1)}(t) - \frac{\omega_n^{(n+1)}(t)\, r_n(x)}{\omega_n(x)}$$

$$= f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!\, r_n(x)}{\omega_n(x)}$$

Se valutiamo $g^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!\, r_n(x)}{\omega_n(x)}$$

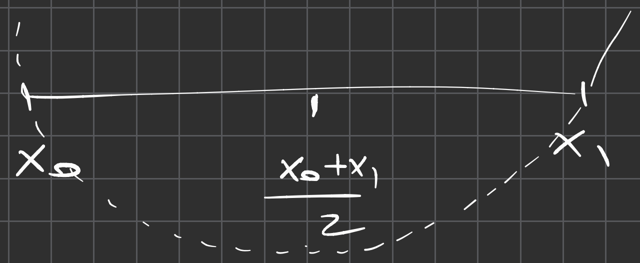
da cui si conclude

$$r_n(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

#

Esempio $\quad n = 1$

$$r_1(x) = (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi)}{2!} \qquad \xi \in (x_0, x_1)$$



$$\max_{x\in(x_0,x_1)} |x-x_0|\,|x-x_1| = \frac{(x_0-x_1)^2}{4}$$

Se indichiamo con $M_2 = \max_{x\in(x_0,x_1)} |f''(x)|$

allora

$$|r_1(x)| \le \frac{(x_0-x_1)^2}{4}\,\frac{M_2}{2} = M_2\,\frac{(x_0-x_1)^2}{8}$$

Se $f(x) = x^2 \quad x \in [1.3, 1.4]$ sapendo che

$f''(x) = 2$

$$|r_1(x)| \le 2\,\frac{(0.1)^2}{8} = 2.5\cdot 10^{-3}$$

Venerdì 1 dicembre no lezione