Lezione 12 (24 novembre 2023)

$$Ax = b$$

$$A = M - N \qquad \det(M) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$$

P = matrice di iterazione

$$P = M^{-1} N$$

$$q = M^{-1} b$$

$$A = D - (B + C) \qquad A = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & \end{pmatrix}$$

Possiamo costruire dei metodi specifici

* JACOBI

$$J = -D^{-1}(A - D) \qquad q_J = D^{-1} b$$

* GAUSS - SEIDEL

$$G = (D - B)^{-1} C$$

$$q_G = (D - B)^{-1} b$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Le matrici di iterazione di Jacobi e Gauss-Seidel sono

$$J = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

CONVERGENZA di Jacobi e G-S

Def: diagonale dominanza

A è diagonalmente dominante per righe (o a predominanza diagonale per righe)

se $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

ed esiste un indice s per cui
la disuguaglianza vale strettamente

A è strettamente diagonalmente domin. per righe se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|$$

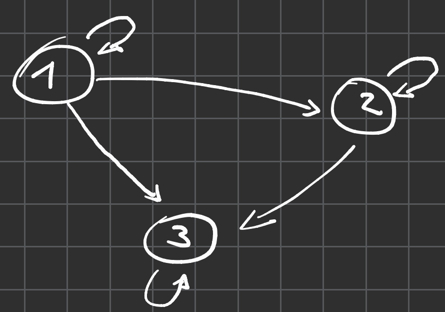
<u>Def</u>: grafo associato ad una matrice

Data A il grafo associato si ottiene definendo tanti nodi quanti la dimensione e avente archi dove ci sono elementi non nulli

Ovvero se $a_{ij} \neq 0$ c'è un arco orientato che va dal nodo i al nodo j

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Def grafo fortemente connesso

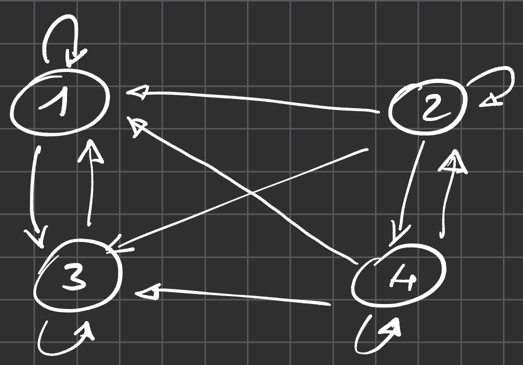
Un grafo orientato (associato ad una matrice A) è fortemente connesso se per ogni $1 \le i, j \le n$ $i \neq j$ esiste un cammino orientato che parte dal nodo i e arriva al nodo j

Def: matrice riducibile / irriducibile

A è riducibile se e solo se il grafo associato non è fortemente connesso. Sarà irriducibile altrimenti

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



non esiste un cammino orientato da 1 a 4

$\Rightarrow$ il grafo non è fortemente connesso $\Rightarrow$ A riducibile

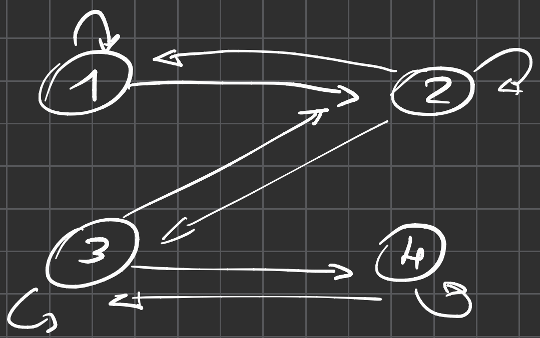
Altro esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

è riducibile
(verificarlo per caso)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

NB
- $A = A^T$
- A è diag. dom.
- A è def +
- $\det(A) = 5$



è irriducibile

In generale

$$\underset{n \times n}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = n+1$
autovalori
$\lambda_j = 2 + 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$
che sono ovviamente positivi

$$A = LU \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1/2 & 1 & & & \\ & -2/3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ & 3/2 & -1 & & \\ & & 4/3 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}$$

Teorema

Sia $A = M - N$ che nel caso di Jacobi $M = D$ $N = B + C$ e nel caso di GS $M = D - B$, $N = C$

Se una delle seguenti ipotesi è verificata

(a) A è strett. diag. dominante per righe (o colonne)

(b) A è diag. dominante e irriducibile

allora $\rho(\underbrace{M^{-1}N}_{(P \text{ "generica matrice d'iterazione"})}) < 1$ e quindi

Jacobi e G-S sono convergenti

→ Vediamo la <u>proprietà (a)</u> nel caso di Jacobi

Devo provare che $\rho(J) < 1$

$J = D^{-1}(B + C)$. Essendo A strett. diag. dominante gli elementi diagonali non sono nulli

Siano λ e x generico autovalore e corrispondente autovettore di J

$$Px = \lambda x$$

che per componenti

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j = \lambda x_i \qquad i = 1, \dots, n$$

Possiamo assumere che $\max_{1 \le i \le n} |x_i| = 1$
e sia k l'indice in cui si assume.

$$1 \cdot |\lambda| = \Big| \sum_{\substack{j \ne k \\ j=1}}^{n} \underbrace{p_{kj}}_{-\frac{a_{ij}}{a_{kk}}} \cdot x_j \Big| \le \sum_{k \ne j} \left| \frac{a_{ij}}{a_{kk}} \right| < 1$$

diagonale dominante stretta

$$|\lambda| < 1$$

per la generalità di $|\lambda|$ onde

$$\max_{1 \le i \le 1} |\lambda_i| < 1$$

#

<u>NB</u> La proprietà (a) non implica che J sia non singolare

Infatti

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema Se A è tridiagonale con $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i$

Allora i metodi di J e G-S sono entrambi convergenti o entrambi divergenti. Se convergono

$$\rho(G) = \rho^2(J)$$

Ovvero G-S (quando converge anche Jacobi), converge con ordine doppio di Jacobi

METODO SOR

S = successive
Over Relaxation

Determinare un parametro ω di accelerazione della convergenza del metodo G-S

$$\omega A x = \omega b \qquad \omega \neq 0 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

$$\omega A = \omega(D - B - C) = \omega(M - N)$$

$$\omega(D - B - C) + D - D = M - N$$

Prendo $M = D - \omega B \qquad N = (1-\omega)D + \omega C$

NOTA BENE se $\omega = 1$ si ottiene G-S.

Se $\det(M) \neq 0$ possiamo costruire il metodo

$$x^{(k+1)} = M^{-1} N x^{(k)} + q$$

Nella fattispecie

$$(**) \quad \boxed{x^{(k+1)} = \underbrace{(D-\omega B)^{-1}\left[(1-\omega) D + \omega C\right]}_{H_\omega} x^{(k)} + \underbrace{\omega (D-\omega B)^{-1} b}_{q}}$$

La matrice d'iterazione del SOR

$$H_\omega := (D-\omega B)^{-1}\left[(1-\omega) D + \omega C\right]$$

Dalla $(**)$ ricaviamo

$$D x^{(k+1)} - \omega B x^{(k+1)} = (1-\omega) D x^{(k)} + \omega C x^{(k)} + \omega b$$

e poi moltiplichiamo per D^{-1}

otteniamo

$$x^{(k+1)} = (1-\omega) x^{(k)} + \omega \underbrace{D^{-1}\left[B x^{(k+1)} + C x^{(k)} + b\right]}_{x_{GS}^{(k+1)}}$$

Ovvero

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)\, x^{(k)} + \omega\, x_{GS}^{(k+1)}$$

che si può anche scrivere per componenti

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega\, x_{GS,i}^{(k+1)} \qquad i=1,\dots,n$$

e ancora una volta se $\omega = 1$ si ha l'iterazione di G-S.

Teorema

Condizione necessaria per la convergenza del SOR è che

$$0 < \omega < 2 \qquad (***)$$

Inoltre

- se $A = A^T$ def +, SOR converge e quindi la condizione $(***)$ è anche sufficiente
- se A è tridiagonale e gli autovalori di J (della matrice d'iterazione di Jacobi) sono t.c. $\rho(J) < 1$ allora esiste unico ω^* ottimale t.c.

$$\rho(H_{\omega^*}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega)$$

il cui valore è

$$\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J)}}$$

Verifichiamo che se $0<\omega<2$

$$\rho(H_\omega) < 1$$

$$\det(H_\omega) = \det(D-\omega B)^{-1} \underline{\det((1-\omega)D+\omega C)}$$

$$= \frac{(1-\omega)^n \cancel{\prod_{i=1}^n d_{ii}}}{\cancel{\prod_{i=1}^n d_{ii}}}$$

$$\det(H_\omega) = (1-\omega)^n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Pensando al raggio spettrale di H_ω esisterà almeno un autovalore di modulo $\geq |1-\omega|$

$$\underline{\underline{1}} > \rho(H_\omega) = \max|\lambda_i| \geq \underline{\underline{|1-\omega|}}$$

$$|1-\omega| < 1$$

ovvero $0<\omega<2$

NB se $\omega = 0 \Longrightarrow H_\omega = I$ che ha raggio spettrale 1 $\Longrightarrow$ non converge

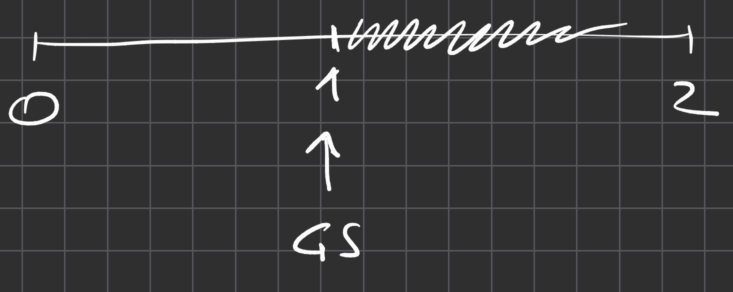
Esempio

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} 2 & i=j \\ -1 & |i-j|=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

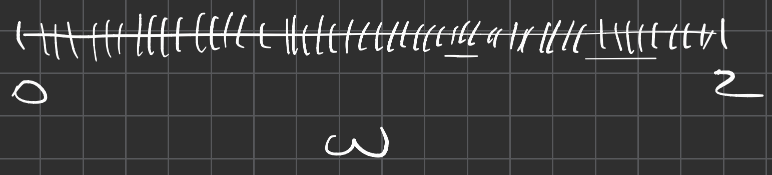
Ad esempio con $n = 4$ $\quad \rho(J) \cong 0.9 < 1$

allora posso determinare $\omega^* = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J)}}$

$\omega^* \approx 1.4 \Longrightarrow \rho(H_{\omega^*}) \cong 0.4$



Come posso determinare un'approssimazione di ω^*?

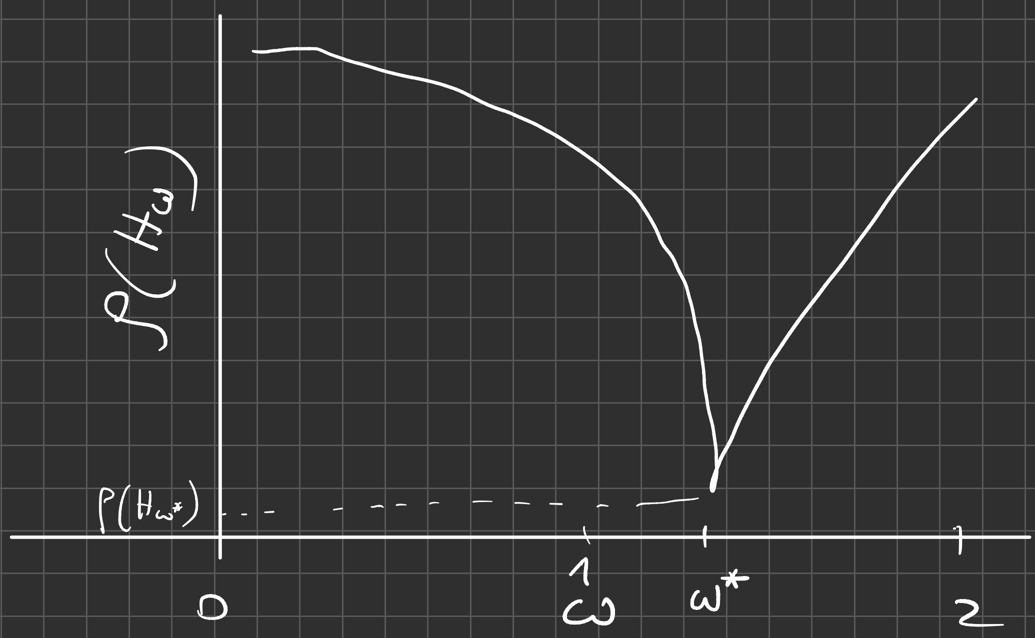


Data una discretizzazione fine con M punti di $(0,2)$ di valori di ω

Per ognuno di questi valori mi calcolo il corrispondente raggio spettrale

$$r(i) = \rho\left(H_{\omega(i)}\right) \qquad i = 1, \dots, M$$

$$\rho\left(H(\omega^*)\right) = \min_{1 \le i \le M} r(i)$$



alternativamente