Lezione 11 (22 novembre 2023)

Fattorizzazione SVD

$$A = U W V^T$$

Siano u_k, v_k la k-esima colonna di U e V rispettivamente. Allora

$$A = \sum_{k=1}^{n} w_k \underbrace{u_k v_k^T}_{C_k} \qquad (1)$$

SVD1

$$U W V^T = \sum_{k=1}^{n} w_k u_k v_k^T \quad \text{è}$$

somma di n matrici C_k di rango 1

Perché dato un generico vettore y

$$C_k y = u_k v_k^T y = \underbrace{(v_k, y)}_{\text{prodotto scalare}} u_k$$

SVD$_r$

Se in (1) ci arrestiamo al termine r (invece di n), $r < n$, otteniamo una approssimazione di rango r di A

Supponiamo che A sia una immagine cioè una matrice formata da numeri

Usando l'idea della SVD_r posso comprimere l'immagine A con

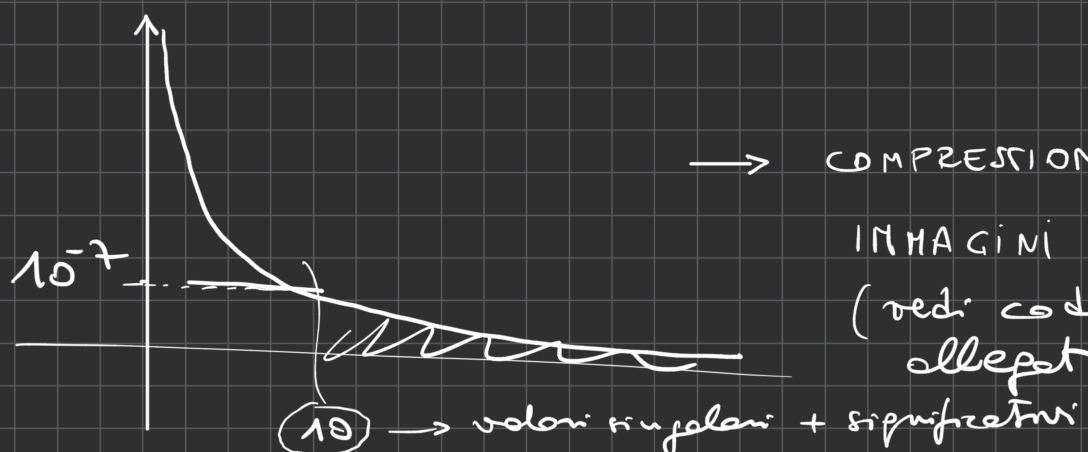
$$A_r = \sum_{k=1}^{r} \underline{\underline{w_k u_k v_k^T}} \qquad r < n$$

$\longrightarrow$ MATLAB

Al link

http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4772_image_compression?s_tid==ta_fx_results

SVD di A posso considerare solo alcuni valori singolari



$\longrightarrow$ COMPRESSIONE DI IMMAGINI (vedi codice allegato)

SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI CON METODI ITERATIVI

$$f(\bar{x}) = A\bar{x} - \bar{b} = 0$$

trovare $\bar{x}$ equivale a risolvere un problema di punto fisso multivariato

Dato $\bar{x}^{(0)}$ approssimazione iniziale della soluzione, vogliamo costruire una successione di vettori $\{\bar{x}^{(i)}\}$ che sperabilmente converge a $\bar{x}$

NB: A differenza dei metodi diretti (es. MEG, Cholesky o altri) in questi metodi non si cambia la struttura della matrice

Quindi sono particolarmente indicati per matrici sparse

Domanda: come costruire una successione di vettori?

Sia A di ordine n, $|A| \neq 0$

$$A = M - N$$

con $\det(M) \neq 0$ ($\Rightarrow$ invertibile)

Tornando al sistema $Ax = b$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

$$x = \underbrace{M^{-1}N}_{P} x + \underbrace{M^{-1}b}_{q}$$

Ottengo la successione

$$\boxed{x^{(i+1)} = P x^{(i)} + q \qquad i \geq 0} \quad (2)$$

<u>Definizione</u>

La successione $\{\bar{x}^{(i)}\}$ si dirà convergente al vettore $\bar{x}$ e si scrive

$$\lim_{i \to +\infty} x^{(i)} = x$$

se per $i \to +\infty$ le componenti di $x^{(i)}$

convergono verso le corrispondenti componenti di $\bar{x}$

$$x^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{x}$$

La (2) rappresenta un <u>metodo iterativo</u> per risolvere $A\bar{x} = \bar{b}$. La matrice P si chiama <u>matrice d'iterazione</u>

<u>Definizione</u>

Un metodo iterativo si dice <u>convergente</u> se per ogni scelta di $\bar{x}^{(0)}$ la successione $\{\bar{x}^{(i)}\}$ è convergente

<u>Esempio</u>

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \qquad q = 0$$

$$x^{(i+1)} = P x^{(i)}$$

che ha soluzione $x = 0$

Scelgo $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^{(1)} = P x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = P x^{(1)} \left(= P^2 x^{(0)} \right) = \begin{pmatrix} 1/3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = P x^{(k-1)} = \begin{pmatrix} 1/3^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \to +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{x}$$

Invece se scelgo $\bar{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} 1/3^k \\ 0 \\ (5/4)^k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \infty \end{pmatrix}$$ divergenza

TEOREMA

Condizione sufficiente per la convergenza è che esiste una norma di matrice indotta $\|\cdot\|$ per cui $\|P\| < 1$

Dim

$e^{(k)} = x^{(k)} - x$ errore al passo k

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x = P x^{(k-1)} + q - (Px + q)$$

$$= P x^{(k-1)} - P x = \underline{\underline{P e^{(k-1)}}}$$

Continuando

$$P e^{(k-1)} = \dots = P^{(k-1)} e^{(0)}$$

$$e^{(k)} = P^{(k-1)} e^{(0)}$$ passando alle norme

$$\| e^{(k)} \| \leq \| P^{(k-1)} \| \cdot \| e^{(0)} \|$$

ma $\| P^{(k-1)} \| = \| \underbrace{P \cdot P \cdots P}_{k-1} \| \leq \underbrace{\|P\| \cdots \|P\|}_{k-1}$

$$\| e^{(k)} \| \leq \| P \|^{k-1} \| e^{(0)} \|$$

Pertanto, se $\|P\| < 1$ allora per il teorema dei 2 carabinieri

$$\| e^{(k)} \| \longrightarrow 0$$

Ma la norma è continua e si conclude #

Tornando all'esempio di prima

$$\|P\|_\infty = \|P\|_1 = \|P\|_2 = 5/4 > 1$$

ecco dimostrato perché quella matrice mi dava un metodo non convergente!

Ricordando che

$$\rho(P) \leq \|P\|$$

per ogni norma indotta

Allora la condizione necessaria e sufficiente è che

$$\lim_{k \to +\infty} P^k = 0 \iff \rho(P) < 1$$

<u>NB</u> $\rho(P)$ di P

<u>TEST d'ARRESTO</u>

Fissata una tolleranza tol (o ε) e un numero massimo d'iterazioni kmax il test d'arresto che useremo è

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| > tol \, \|x^{(k)}\|$$

$$\& \quad k \leq kmax$$

se $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq tol \, \|x^{(k)}\|$ $\longrightarrow$ conv.

oppure $k > kmax$ $\longrightarrow$ non conv.

ci si ferma.

STIMATORI D' ERRORE

1) RESIDUO

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Ci si arresta se per un certo k_{min}

$$\| r^{(k_{min})} \| \leq tol \, \| b \|$$

Infatti

$$Ax = b$$

$$\left\| \frac{x - x^{(k)}}{x} \right\| = \left\| \frac{Ax - Ax^{(k)}}{Ax} \right\|$$

Quindi l'errore relativo

$$\frac{\| x - x^{k_{min}} \|}{\| x \|} = \frac{\| A^{-1}(b - Ax^{(k_{min})}) \|}{\| x \|}$$

$$\leq \frac{\| A^{-1} \| \, \| r^{(k_{min})} \|}{\| x \|} \overset{(*)}{\leq} tol \; K(A)$$

Osservo che $\| b \| \leq \| A \| \, \| x \|$

$$\frac{1}{\| b \|} \geq \frac{1}{\| A \| \, \| x \|}$$

$$\frac{1}{\| x \|} \leq \frac{\| A \|}{\| b \|}$$

Dove (*) si ottiene osservando che

$$\frac{\| b \|}{\| x \|} \leq \| A \|$$

2) SCARTO

$$\delta^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$$

Ci si arresta quando per un certo k_{min}

$$\| \delta^{k_{min}} \| \leq tol$$

Infatti: se P è simmetrica e definita positiva

$$\underset{\substack{\| \\ x^{(k)} - x}}{\| e^{(k)} \|} = \| \underset{\substack{\| \\ x^{k+1} - x}}{e^{(k+1)}} - \underset{\substack{\| \\ - x^{k+1} + x^{k}}}{\delta^{(k)}} \| \leq \|P\| \, \| e^{(k)} \| + \| \delta^{(k)} \|$$

$$= \rho(P) \, \| e^{(k)} \| + \| \delta^{(k)} \|$$

Per convergenza $\rho(P) < 1$

$$\| e^{(k)} \| \leq \frac{1}{1 - \rho(P)} \| \delta^{(k)} \|$$

Pertanto se $\| \delta^{(k_{min})} \| < tol \implies \| e^{(k)} \| < tol$ e questo sarà tanto vero tanto più piccolo risulta $\rho(P)$, al contrario se $\rho(P) \gtrsim 1$ la disuguaglianza sarà verificata in senso meno stretto

Dal punto di vista della convergenza tanto più piccolo è $\rho(P)$ tanto più rapida è la convergenza

Osservazioni

(i) Se P non è simm. def $+$ si arriva alla medesima conclusione con $\|P\|$ al posto del $\rho(P)$

(ii) il controllo sullo scarto è tanto migliore quanto più

$$\rho(P) \ll 1$$

(iii) circa la convergenza più piccolo è $\rho(P)$ più rapida sarà

METODO di JACOBI

Si parte dallo splitting fondamentale

$$A = D - (B + C)$$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -C \\ & D & \\ -B & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & i \geq j \\ -a_{ij} & i < j \end{cases}$$

Pertanto nel metodo di Jacobi

$$M = D \qquad N = B + C$$

Allora la matrice d'iterazione di Jacobi

$$J = D^{-1}(B+C)$$

$$q_J = D^{-1} b$$

L'iterazione del metodo di Jacobi è

$$x^{(k+1)} = J x^{(k)} + q_J \qquad k \geq 0$$

Per componenti

SPOSTAMENTI SIMULTANEI

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right\} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)}_{J_{ij}} x_j^{(k)} + \underbrace{\frac{b_i}{a_{ii}}}_{(q_J)_i}$$

La matrice del metodo di Jacobi si ottiene dalla matrice A

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Una variante è il metodo di GAUSS-SEIDEL

$$M = D - B \qquad N = C$$

$$G = (D-B)^{-1} C \qquad q_G = (D-B)^{-1} b$$

Osservo

$$x^{(k+1)} = (D-B)^{-1} C x^{(k)} + (D-B)^{-1} b$$

$$(D-B)\, x^{(k+1)} = C\, x^{(k)} + b$$

$$D\, x^{(k+1)} = B\, x^{(k+1)} + C\, x^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1} B\, x^{(k+1)} + D^{-1} C x^{(k)} + D^{-1} b$$

$k \geq 0$

x componenti $\Downarrow$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right\}$$

SPOSTAMENTI SUCCESSIVI