UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Elementi di teoria degli errori di misura

Il metodo scientifico

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Tutti fenomeni fisici devono essere osservati e misurati

Il processo di misura è alla base di tutte le teorie fisiche e consiste nel confronto tra grandezze della stessa specie, da questo scaturisce un numero che indica una proprietà della grandezza fisica misurata.

In questo processo si possono identificare tre *elementi*:

1) Grandezza fisica da misurare
2) Unità di misura (SI)
3) *Strumento di misura ed esecuzione della misura*

Strumenti di misura

Università degli Studi di Padova


Sensibilità: minima variazione apprezzabile (1 mm in figura per il metro, 1 g per la bilancia)

Precisione: riproducibilità dei risultati

Accuratezza: capacità di fornire valori realmente corrispondenti al valore vero della grandezza in esame

Intervallo d'uso: possibili condizioni di lavoro

Prontezza : velocità con cui la misura è disponibile


Incertezza sulle misure - I

Ogni misura è affetta da una incertezza, si parla di analisi degli errori o di teoria degli errori per indicare il procedimento di calcolo di questa incertezza.

L'incertezza sulla singola misura e su un insieme di misure ha più di una sorgente:

- Strumentale
- Sistematica : dovuta al processo di misura o errata interpretazione dei risultati, si presenta ad ogni misura e da un contributo sempre per eccesso o per difetto
- Casuale: è dovuta a cause imprevedibili e si presenta con contributi diversi per ogni misura.

Confrontandosi con un insieme di misure ripetute della stessa grandezza si parla di Incertezza Statistica

L'incertezza nelle misure è data dal maggiore tra l'errore statistico e l'errore strumentale, esprimendo il valore della misura come **$x = x \pm \delta x$**

Incertezza sulle misure - II

Una misura non ha nessun significato se non viene accompagnata dalla stima dell' incertezza associata.

Se uso una riga con divisioni ogni 1 mm e per confronto vedo che la larghezza di un foglio è compresa tra le divisioni 215 e 216

scriverò che:

$$\mathbf{0.215\ m \leq l \leq 0.216\ m \text{ ovvero } l = (0.2155 \pm 0.0005)\ m}$$

In caso di singola misura si usa come errore la metà del minimo intervallo apprezzabile dallo strumento di misura (errore assoluto strumentale)

Il numero di cifre significativa non deve mai essere maggiore del numero di cifre significative utilizzate per l'incertezza.

In caso in cui il numero di cifre sia eccessivo si deve procedere ad un arrotondamento per difetto (cifra minore di 5) o per eccesso (cifra maggiore di 5).

Misure ripetute - I

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

15 misure ripetute della stessa bottiglia con la stessa bilancia

Misure ripetute - II

Indice	Peso (g)	Incertezza (g)
1	831	0.5
2	832	0.5
3	830	0.5
4	833	0.5
5	833	0.5
6	832	0.5
7	833	0.5
8	832	0.5
9	832	0.5
10	831	0.5
11	832	0.5
12	829	0.5
13	829	0.5
14	831	0.5
15	833	0.5

Inseriamo i dati in una tabella riassuntiva indicando sempre il valore dell'errore strumentale sulla singola misura (0.5g).

In questo caso la differenza tra le misure è sintomo della presenza di errori casuali ineliminabili.

Prima di effettuare la misura abbiamo effettuato una taratura della bilancia ma non possiamo escludere un errore nel processo di taratura che introduce quindi un errore sistematico che non siamo in grado purtroppo di eliminare.

Vediamo che l'errore casuale è superiore all'errore strumentale in questo caso.

Miglior stima della misura

Non possiamo avere conoscenza esatta del peso della bottiglia, prendiamo come miglior stima della misura la media aritmetica dei 15 valori $\{x_1,\ldots..,x_n\}$.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Al valore della miglior stima va associata una quantità che esprima l'incertezza. Di solito si utilizza la semi-ampiezza dell'intervallo definito dalle misure minime e massime.

$$\Delta\overline{x} = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

Nel caso in esempio otteniamo che la miglior stima del peso della bottiglia è:

$$\overline{\boldsymbol{m}} = (\mathbf{0.832} \pm \mathbf{0.002})\ \boldsymbol{kg}$$

Scarto quadratico medio

Una stima più raffinata dell'incertezza si ha calcolando lo scarto quadratico medio delle N misure che è definito come la radice quadrata della somma in quadratura delle differenze tra la singola misura e il valore medio, diviso per N-1.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

Nel nostro caso otteniamo che $\sigma = 1.5\ g$
quindi possiamo scrivere che la miglior stima della misura è

$$\boldsymbol{\overline{m} = (0.8315 \pm 0.0015)\ kg}$$

La presenza di un campione di misure ripetute fa si che possiamo ridurre l'incertezza considerando che i termini della somma privilegiano le misure più vicine al valore medio.

Distribuzione delle misure

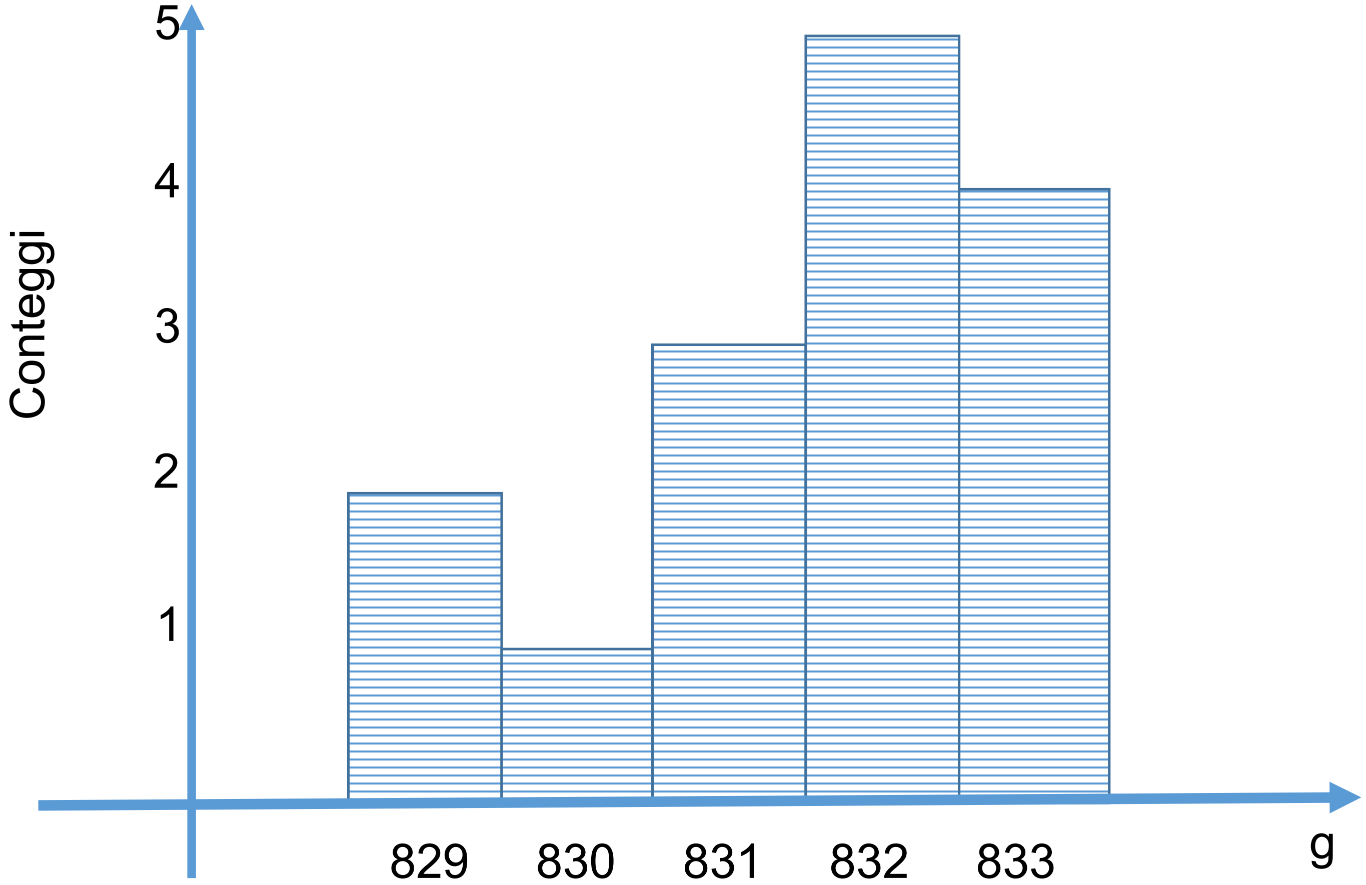
Le nostre 15 misure ripetute possono essere rappresentate in un grafico che tenga conto della frequenza con cui ogni misura si ripete, un grafico di questo tipo viene detto Istogramma e si costruisce nel modo seguente:

Misura	Peso (g)
1	831
2	832
3	830
4	833
5	833
6	832
7	833
8	832
9	832
10	831
11	832
12	829
13	829
14	831
15	833

Valore (g)	Frequenza
829	2
830	1
831	3
832	5
833	4

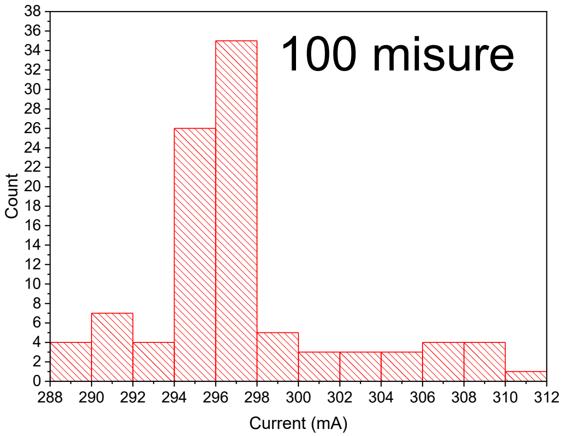
Distribuzione delle misure

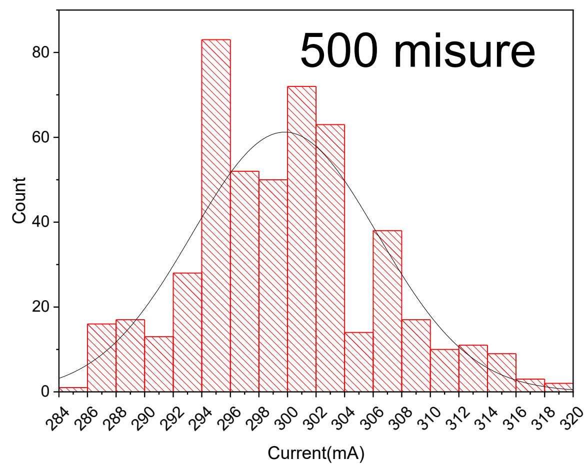
Le coppie (Frequenza, Valore) si riportano in un grafico a barre detto istogramma

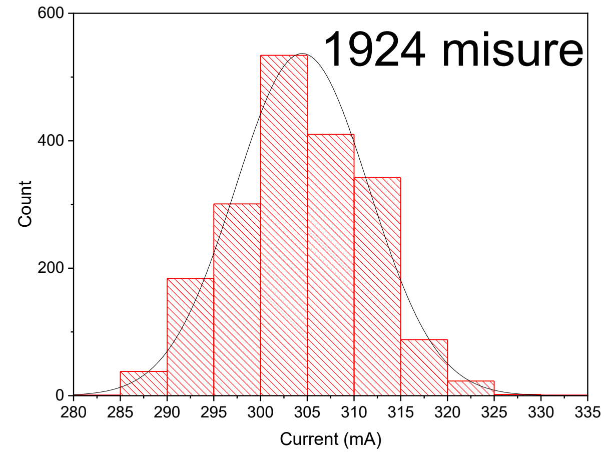


Distribuzione delle misure

Prendiamo come esempio le misure della corrente assorbita da un componente elettronico, le misure vengono effettuate ogni 10 secondi e sono tutte indipendenti tra loro, l'errore strumentale è costante mentre l'errore casuale è variabile.







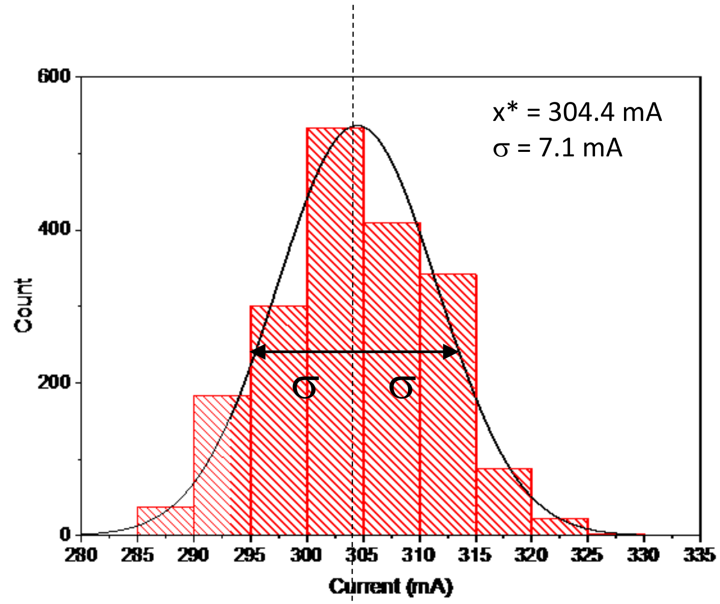
L'istogramma delle misure ha fluttuazioni statistiche che diminuiscono al crescere del numero delle misure e la distribuzione diviene sempre più simmetrica.

La distribuzione Normale - I

Se indichiamo il valore dei conteggi associati ad una misura in funzione della misura x possiamo costruire una funzione che dato il valore di x ci permette di calcolare quante volte otteniamo quel valore.

Per grandezze affette da errori casuali su misure indipendenti tra loro si vede che questa funzione ha l'andamento di una funzione Gaussiana (o Normale).

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}$$



x* è il valore medio della variabile e rappresenta il massimo e si trova lungo l'asse di simmetria della distribuzione, σ è la semi-ampiezz della campana a livello del flesso.

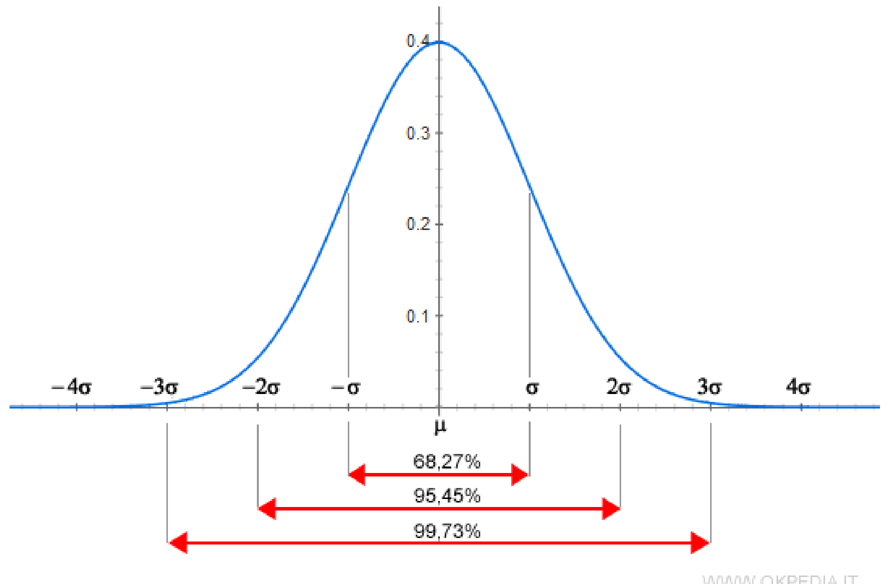
La miglior stima della misura in questo caso si espri come (304.4 ± 7.1) mA dove x* è la miglior stima e σ rappresenta la deviazione standard del campione di misure.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Intervalli di confidenza

La distribuzione di Gauss ha valori tabulati al variare di x.
La probabilità che una misura in un insieme casuale abbia un valore compreso in un intervallo di semi - ampiezza $n\sigma$ ha i seguenti valori:

$n\sigma$	$P(x^* - n\sigma < x < x^* - n\sigma)$
1	68.27 %
2	95.45 %
3	99.73 %



Da questa circostanza possiamo concludere che in un insieme di misure ripetute la quasi totalità dei valori di troverà entro <u>+</u> 3σ dal valore medio.
Questo ci consente di identificare misure affette da errori grossolani nel nostro campione.

La media come miglior stima

Il massimo della distribuzione Normale identifica la miglior stima ed è il valore medio della distribuzione.
Poiché la funzione è simmetrica il valore medio coincide con la media aritmetica, con la mediana del campione di dati (il valore centrale) e con la moda del campione (il valore che ha maggiore frequenza).

Si può dimostrare, tenendo conto della forma analitica della funzione di Gauss, che il valore massimo è la media aritmetica dei valori.

L'errore sulla media viene espresso in termini della deviazione standard e si può dimostrare che il suo valore è pari a:

$$\sigma_{x*} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad dove\ N\ \text{è}\ il\ numero\ di\ misure\ del\ campione$$

Aumentare il numero di misure ripetute ci consenta di diminuire l'incertezza sulla miglior stima della nostra grandezza.

Errore relativo

Insieme con l'errore assoluto sulla singola misura e sulla miglior stima l'estimatore dell'accuratezza della misura è l'errore relativo associato alla misura che è definito come il rapporto tra l'incertezza e il valore della misura, viene espresso in percentuale e quindi viene anche detto errore percentuale

$$\frac{\delta x}{x} = \varepsilon$$

Se il valore dell'errore percentuale è superiore ad 1 lo strumento di misura che stiamo utilizzando non è adeguato perché non ci consente di valutare le dimensioni della grandezza fisica!!!

Nel caso del nostro esempio l'errore relativo è dato da:

$$0.0015/0.8315 = 0.2\ \%$$

Misure indirette: propagazione delle incertezze

Università degli Studi di Padova

Nel caso in cui ci apprestiamo a stimare una grandezza in maniera indiretta, ovvero calcolandola a partire da altre grandezze effettivamente misurate (ad esempio se stimiamo una velocità media misurando lo spazio percorso da un corpo e il tempo necessario a percorrerlo) dobbiamo tenere conto delle incertezze sulle singole misure e propagarle alla grandezza calcolata.

Una prima stima di questa regola ci dice che nel caso della velocità l'incertezza relativa sulla velocità sarà pari alla somma dell'incertezza relativa su spazio e tempo.

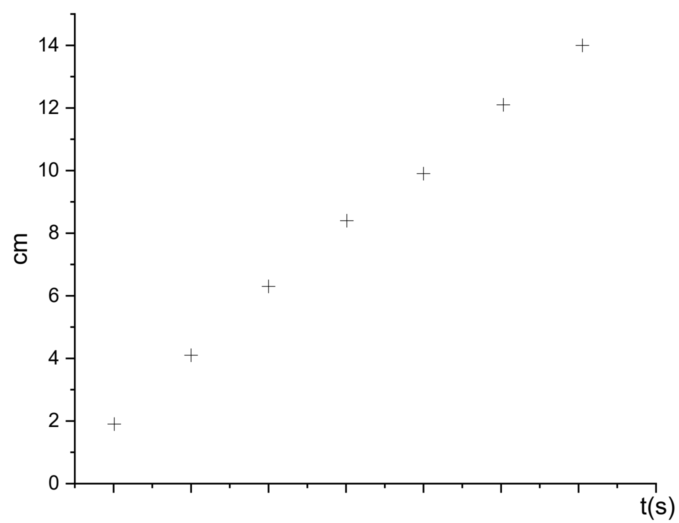
Quindi

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta t}{t}$$

analogamente si procede nel caso si abbia un prodotto o una somma algebrica tra due grandezze misurate. Nelle prossime lezioni vedremo come raffinare questo risultato.

Il metodo dei minimi quadrati - I

Il processo di misura spesso consiste anche nel verificare la proporzionalità tra due valori misurati.
Un caso semplice di proporzionalità è quello della dipendenza lineare tra due variabili, ad esempio lo spazio percorso da un corpo che si muove a velocità costante v e il tempo. Ipotizzando di misurare lo spazio percorso e i tempi corrispondenti possiamo costruire un grafico con i due campioni di misure e riportarlo sul piano cartesiano.



Misura	T(s)	X (cm)
1	1.00	1.9
2	2.01	4.1
3	3.00	6.3
4	4.01	8.4
5	5.00	9.9
6	6.03	12.1
7	7.05	14.0

Il metodo dei minimi quadrati - II

Possiamo calcolare la velocità come coefficiente angolare della retta $s = s_0 + vt$

Questa retta viene detta retta dei minimi quadrati perchè è la retta che minimizza la somma dei quadrati della distanza prevista con le ordinate dei punti misurati.

Nell'ipotesi in cui le grandezze misurate siano affette solo da errori casuali, la misura delle due sia effettuata in maniera indipendente e le incertezze sulla grandezza riportata come ascissa siano trascurabili rispetto a quelle sulla grandezza riportata come ordinata, il coefficiente angolare b della retta e l'intercetta a con l'asse y sono calcolabili come segue:

$$y = a + bx$$

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}
\qquad
\boxed{b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

Gli errori sui de parametri sono definiti come segue:

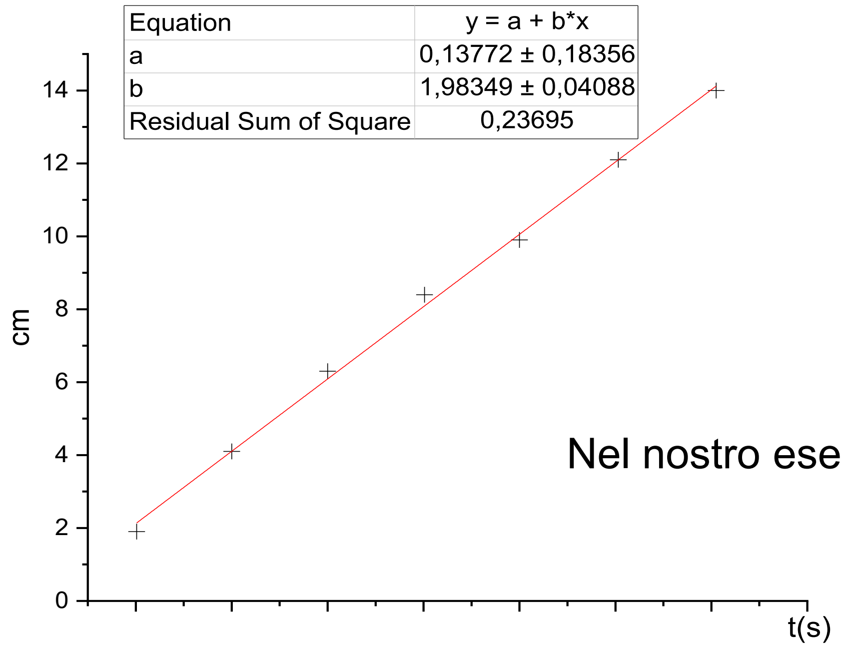
y=a+bx

$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\sigma_b^2 = \sigma_y^2 \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Nel caso σ_y non sia noto, puo` essere stimato dai dati stessi a partire dai residui δy_i del fit

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{Q}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\delta y_i)^2}{n-2}}$$



Nel nostro esempio

v = (1.98 ± 0.04)cm/s

x_0 = (0.13 ± 0.18) cm