Esercizi visti il 21 novembre

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 8.2] Al variare del parametro $\lambda \geq 0$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2}y^4.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Svolgimento. Cerchiamo i punti critici di f: vediamo chi è il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + \lambda y, \lambda x + 2y^3\right).$$

Quindi (x,y) è un punto critico per f se e solo se

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + 2y^3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Studiamo prima il caso $\lambda = 0$. Allora le equazioni di (1) implicano che $(x,y) = (0,0)$ è l'unico punto critico per f se $\lambda = 0$. Possiamo quindi ridurci al caso $\lambda > 0$. Osserviamo immediatamente che se uno tra x e y è nullo allora necessariamente anche altro deve esserlo. Quindi $(x,y) = (0,0)$ è un punto critico per f per ogni $\lambda > 0$. Possiamo quindi ridurci al caso $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\lambda > 0$. Dalla prima equazione otteniamo che

$$x = -\frac{\lambda}{2}y.$$

Sostituiamo nella seconda equazione di (1) ottenendo

$$\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}y\right) + 2y^3 = 0.$$

Ovvero

$$4y^3 - \lambda^2 y = 0$$

visto che $y \neq 0$ possiamo dividere per y ottenendo

$$4y^2 - \lambda^2 = 0$$

ovvero

$$(2y - \lambda)(2y + \lambda) = 0$$

da cui otteniamo le soluzioni

$$y_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad y_2 = -\frac{\lambda}{2}$$

e le corrispondenti "ascisse"

$$x_1 = -\frac{\lambda^2}{4}, \quad x_2 = \frac{\lambda^2}{4}.$$

Ricapitolando abbiamo che f ha i seguenti punti critici:

$$(x_0, y_0) = (0,0), \quad (x_1, y_1) = \left(-\frac{\lambda^2}{4}, \frac{\lambda}{2}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{\lambda^2}{4}, -\frac{\lambda}{2}\right).$$

dove $\lambda \geq 0$. Vediamo quanto vale f in ciascuno di questi punti: abbiamo

$$f(x_0, y_0) = 0$$

$$f(x_1, y_1) = \left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 = -\frac{\lambda^4}{32}$$

$$f(x_2, y_2) = \left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^2 + \lambda\frac{\lambda^2}{4}\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^4 = -\frac{\lambda^4}{32}$$

Calcoliamo ora le derivate seconde (in modo da trovare l'hessiano): abbiamo che

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = \lambda, \quad f_{yy}(x, y) = 6y^2.$$

L'hessiano è quindi dato da

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 6y^2 \end{pmatrix}$$

il suo determinante è

$$\det(H(x, y)) = 12y^2 - \lambda^2.$$

e la sua traccia è

$$\mathrm{tr}(H(x, y)) = 2 + 6y^2.$$

Osserviamo che la traccia è sempre positiva su tutto $\mathbb{R}^2$. Abbiamo che

$$\det(H(x_0, y_0)) = -\lambda^2$$

$$\det(H(x_1, y_1)) = 12\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2 = 2\lambda^2$$

$$\det(H(x_2, y_2)) = 12\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2 = 2\lambda^2$$

Distinguiamo due casi: $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$. Studiamo il caso $\lambda = 0$. Abbiamo l'unico punto da studiare $(0,0)$: l'hessiana lì è semidefinita positiva: quindi f può essere un punto di minimo. In effetti è un minimo globale visto che $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^4 > 0$ se e solo se $(x, y) \neq (0, 0)$. Ci resta da studiare il caso $\lambda > 0$. Abbiamo che $H(x_0, y_0)$ non è nè definita positiva nè definita negativa mentre $H(x_1, y_1)$ e $H(x_2, y_2)$ sono definite positive. Quindi, se $\lambda > 0$, (x_0, y_0) non è nè un punto di massimo nè un punto di minimo mentre (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono punti di minimo almeno locali. Vediamo che sono anche globali. Ricordiamo la disuguaglianza di Young ("con ε"): se $a, b > 0$ e $p, q > 0$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ abbiamo che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ciò vuol dire che per $c, d \in \mathbb{R}$ si ha

$$cd \leq \frac{|c|^p}{p} + \frac{|d|^q}{q}.$$

Ma allora per ogni $\varepsilon > 0$ "ridefinisco" $c = \frac{a}{\varepsilon}$ e $d = \varepsilon b$ e otteniamo che

$$ab \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\frac{|a|^p}{p} + \varepsilon^q \frac{|b|^q}{q}.$$

Fissiamo $p = 4$: segue che $q = \frac{4}{3}$ e quindi nel nostro caso abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$-xy \leq \frac{4}{3}\frac{1}{\varepsilon^{4/3}}|x|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}\varepsilon^4 y^4$$

ovvero

$$\lambda xy \geq -\lambda\frac{4}{3}\frac{1}{\varepsilon^{4/3}}|x|^{\frac{4}{3}} - \lambda\frac{1}{4}\varepsilon^4 y^4$$

da cui

$$f(x,y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2}y^4 \geq x^2 - \lambda\frac{4}{3}\frac{1}{\varepsilon^{4/3}}|x|^{\frac{4}{3}} - \lambda\frac{1}{4}\varepsilon^4 y^4 + \frac{1}{2}y^4 = x^2 - \frac{\lambda 4}{3\varepsilon^{4/3}}|x|^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon^4}{4}\right) y^4.$$

Scegliamo ora $\varepsilon = \frac{1}{100\lambda^{\frac{1}{4}}}$. Segue che $\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon^4}{4}\right) > 0$ e quindi

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$$

. Ma allora per ogni $R > 0$ l'insieme

$$K_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq R\}$$

è chiuso e limitato (quindi f ammette minimo assoluto lì). Ma allora per ogni $R > 0$ si ha

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = \min_{K_R} f$$

da cui otteniamo che (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono minimi assoluti. $\square$

Esercizio 2. [1, Esercizio 8.3] Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Svolgimento. Cerchiamo i punti critici di f: vediamo chi è il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + 3\alpha y, -3y^2 + 3\alpha x\right).$$

Quindi (x,y) è un punto critico per f se e solo se

$$\begin{cases} x^2 + \alpha y = 0 \\ -y^2 + \alpha x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Osserviamo che se uno tra x e y allora anche l'altro lo è e soddisfano le equazioni in (2) quindi $(x,y) = (0,0)$ è un punto critico per f per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi supporre $x \neq 0 \neq y$. Osserviamo inoltre che se $\alpha = 0$ l'unico punto critico è $(0,0)$ quindi possiamo supporre $\alpha \neq 0$. Dalla prima equazione otteniamo

$$y = -\frac{x^2}{\alpha}.$$

Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$-\left(-\frac{x^2}{\alpha}\right)^2 + \alpha x = 0$$

ovvero

$$-\frac{x^4}{\alpha^2} + \alpha x = 0$$

e visto che $x \neq 0$ e $\alpha \neq 0$ possiamo scrivere

$$-x^3 + \alpha^3 = 0$$

da cui otteniamo la soluzione

$$x_1 = \alpha.$$

Troviamo la corrispondente "ordinata" come

$$y_1 = -\frac{\alpha^2}{\alpha} = -\alpha.$$

Abbiamo quindi i punti critici

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (x_1, y_1) = (\alpha, -\alpha)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. I corrispondenti valori di f sono

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f(x_1, y_1) = -\alpha^3.$$

Troviamo le derivate seconde:

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy} = 3\alpha, \quad f_{yy} = -6y.$$

L'hessiano è quindi dato da

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}$$

il suo determinante è

$$\det(H(x, y)) = -36xy - 9\alpha^2 = -9(4xy + \alpha^2).$$

e la sua traccia è

$$\mathrm{tr}(H(x, y)) = 6x - 6y = 6(x - y).$$

Abbiamo

$$\det(H(x_0, y_0)) = -9\alpha^2, \quad \mathrm{tr}(H(x_0, y_0)) = 0$$

e

$$\det(H(x_1, y_1)) = 27\alpha^2, \quad \mathrm{tr}(H(x_1, y_1)) = 12\alpha.$$

Discutiamo prima il caso $\alpha = 0$. In $(0, 0)$ sia traccia che determinante sono nulli. Osserviamo che $g_1(x) = f(x, 0)$ e $g_2(y) = f(0, y)$ sono crescenti quindi $(0, 0)$ è un punto di sella. Vediamo ora il caso $\alpha \neq 0$. In (x_0, y_0) abbiamo che il determinante è negativo e la traccia è nulla quindi l'hessiana non è nè definita positiva nè definita negativa: ciò ci dice che $(0, 0)$ è un punto di sella. Distinguiamo ora ulteriormente due casi: $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. Nel primo caso in (x_1, y_1) sia il determinante che la traccia sono positivi quindi (x_1, y_1) è un punto di minimo (almeno) locale. Vediamo che non è globale perche

$$\lim_{y \to +\infty} f(0, y) = -\infty.$$

Se invece $\alpha < 0$ il determinante è positivo e la traccia è negativa: ciò ci dice che (x_1, y_1) è un punto di massimo (almeno) locale. Vediamo che non è globale perche

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty.$$

$\square$

Esercizio 3. [1, Esercizio 8.4] Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy.$$

i) Calcolare tutti i punti crtici di f interni a K.

ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f in K.

Svolgimento. i) (x,y) è un punto critico per f su $\mathbb{R}^2$ se $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Calcoliamo il gradiente.

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 + 4xy^2 - \beta y, 4y^3 + 4x^2y - \beta x).$$

Otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - \beta y = 0 \\ 4y^3 + 4x^2y - \beta x = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni otteniamo

$$4(x^3 + y^3) + 4xy(y + x) - \beta(y + x) = 0$$

ovvero

$$4(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x + y)(4xy - \beta) = 0$$

i.e.

$$(x + y)(4x^2 - 4xy + 4y^2 + 4xy - \beta) = 0$$

cioè

$$(x + y)(4x^2 + 4y^2 - \beta) = 0$$

Da cui otteniamo che o $x + y = 0$ oppure $4x^2 + 4y^2 - \beta = 0$. Se $x = -y$ allora dalla prima equazione otteniamo

$$8x^3 + \beta x = 0$$

Da cui otteniamo l'unica soluzione $x_0 = 0$ (visto che $\beta > 0$) e quindi il corrispondente punto critico $(x_0, y_0) = (0,0)$. Se invece $4x^2 + 4y^2 = \beta$ sostituendo nella prima equazione troviamo

$$4x^3 + 4xy^2 - (4x^2 + 4y^2)y = 0$$

ovvero

$$4x^3 + 4xy^2 - 4x^2y - 4y^3 = 0$$

i.e.

$$x^2(x - y) + y^2(x - y) = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)(x - y) = 0$$

e ciò ci impone $x = y$. Sostituendo nuovamente nella prima equazione otteniamo

$$8x^3 - \beta x = 0$$

da cui, oltre alla soluzione $(0,0)$, troviamo

$$x_1 = \sqrt{\frac{\beta}{8}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{\beta}{8}}.$$

e quindi le corrispondenti soluzioni

$$(x_1, y_1) = \left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \sqrt{\frac{\beta}{8}}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(-\sqrt{\frac{\beta}{8}}, -\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)$$

Queste soluzioni appartegono a K se e solo se

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2 + \left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2 \leq 1 \Rightarrow \beta \leq 4.$$

Ricapitolando: per ogni $\beta > 0$ f ammette su K l'origine come punto critico; inoltre, se $\beta \leq 4$, allora ammette anche gli altri due punti critici (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

ii) Vediamo quanto vale f nei tre punti che abbiamo trovato prima:

$$f(x_0, y_0) = 0$$

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = -\frac{\beta^2}{16} < 0.$$

Distinguiamo tre casi: $0 < \beta < 4$, $\beta = 4$, $\beta > 4$.
Caso $0 < \beta < 2$*:* Mostriamo che gli unici due punti di minimo assoluto su K sono (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Passiamo f in coordinate polari:

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 - \beta\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta).$$

Non è difficile vedere che si ha $\cos(\theta)\sin(\theta) \leq \frac{1}{2}$. Abbiamo quindi che

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 - \beta\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta) \geq \rho^4 - \frac{\beta}{2}\rho^2$$

Studiamo la funzione (per $t > 0$)

$$g(t) = t^4 - \frac{\beta}{2}t^2$$

studiando la derivata abbiamo che essa ha un minimo in $t = \sqrt{\frac{\beta}{4}}$ quindi

$$f(\rho, \theta) \geq g\left(\sqrt{\frac{\beta}{4}}\right) = \frac{\beta^2}{16} - \frac{\beta}{2}\frac{\beta}{4} = -\frac{\beta^2}{16}.$$

Se mostriamo che f sul bordo di K ha un valore maggiore di quello raggiunto in (x_1, y_1) e (x_2, y_2) possiamo concludere che se $0 < \beta < 4$ allora f ammette due soli minimi assoluti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) su K. Ma questo è vero perchè

$$f(1, \theta) = 1 - \beta\cos(\theta)\sin(\theta) \geq 1 - \frac{\beta}{2}.$$

Se mostriamo che, per $0 < \beta < 4$, si ha che

$$1 - \frac{\beta}{2} > -\frac{\beta^2}{16}$$

allora abbiamo concluso. Ma ciò è vero visto che

$$16 - 8\beta + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow (\beta - 4)^2 > 0$$

Caso $\beta = 4$: Qui $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono sul bordo di K. Sfruttando quello che abbiamo visto prima abbiamo

$$f(1, \theta) = 1 - 4\cos(\theta)\sin(\theta) \geq -1.$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ovvero quando ritroviamo $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Quindi anche in questo caso ci sono solo quei due punti che sono di minimo assoluto.
Caso $\beta > 4$: Qui l'unico punto critico è $(0, 0)$ quindi ci resta da verificare cosa accade sul bordo di K: abbiamo

$$f(1, \theta) = 1 - \beta\cos(\theta)\sin(\theta) \geq 1 - \frac{\beta}{2}$$

con uguaglianza se e solo se $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{5\pi}{4}$. Ovvero nei punti $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Lo studio della funzione g in uno dei casi precedenti ci fa concludere che questi due punti sono gli unici punti di minimo assoluti su K.

□

Esercizio 4. [1, Esercizio 8.6] In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$

1. Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.
2. Per ciascun $\alpha \in [-2, 2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Svolgimento. 1. Usiamo la caratterizzazione di convessità data da [2, Teorema 6.12.7]: ovvero vogliamo vedere per quali α la funzione ha hessiana semidefinita positiva. Calcoliamo le derivate prime e seconde:

$$f_x(x, y) = e^{x+y} + 2x + \alpha y, \quad f_y(x, y) = e^{x+y} + \alpha x + 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = e^{x+y} + 2, \quad f_{xy}(x, y) = e^{x+y} + \alpha, \quad f_{yy}(x, y) = e^{x+y} + 2.$$

L'Hessiana è quindi data da

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 2 & e^{x+y} + \alpha \\ e^{x+y} + \alpha & e^{x+y} + 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo determinante e traccia.

$$\det(Hf(x, y)) = (e^{x+y} + 2)^2 - (e^{x+y} + \alpha)^2 = e^{2(x+y)} + 4 + 4e^{x+y} - e^{2(x+y)} - \alpha^2 - 2\alpha e^{x+y} =$$

$$= (4 - 2\alpha)e^{x+y} + 4 - \alpha^2$$

$$\mathrm{tr}(Hf(x, y)) = 2e^{x+y} + 4$$

La traccia è sempre positiva: vediamo per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\det(Hf(x, y)) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Definiamo la funzione

$$g(t) = (4 - 2\alpha)e^t + 4 - \alpha^2$$

Distinguiamo tre casi: $\alpha > 2$, $\alpha < 2$ e $\alpha = 2$. Se $\alpha > 2$ allora

$$g(0) = 4 - 2\alpha + 4 - \alpha^2 = 8 - 2\alpha - \alpha^2 < 8 - 4 - 4 = 0$$

quindi se $\alpha > 2$ la funzione non può essere convessa. Se $\alpha = 2$ allora (g e quindi) il determinante è identicamente nullo quindi l'hessiano e semidefinito positivo e la funzione f è convessa. Ci rimane da vedere il caso in cui $\alpha < 2$. Studiamo la derivata $g'(t) = (4 - 2\alpha)e^t$: essa per $\alpha < 2$ è sempre positiva quindi g è crescente su $\mathbb{R}$. Studiamo

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = 4 - \alpha^2$$

Se vogliamo che la funzione sia convessa allora ci basta richiedere che $4 - \alpha^2 \geq 0$. Ovvero che $-2 \leq \alpha \leq 2$. In conclusione f è convessa se e solo se $-2 \leq \alpha \leq 2$.

2. Usiamo [2, Osservazione 6.12.8]. Se troviamo dei punti critici allora questi sono dei minimi globali. Abbiamo già calcolato il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = (e^{x+y} + 2x + \alpha y, e^{x+y} + \alpha x + 2y)$$

ciò ci impone il sistema

$$\begin{cases} e^{x+y} + 2x + \alpha y = 0 \\ e^{x+y} + \alpha x + 2y = 0 \end{cases}.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$(2 - \alpha)x + (\alpha - 2)y = 0 \Rightarrow (2 - \alpha)(x - y) = 0$$

da cui otteniamo $\alpha = 2$ oppure $x = y$. Se $\alpha = 2$ allora sommando membro a membro le due equazioni otteniamo

$$2e^{x+y} + 2(x + y) + 2(x + y) = 0 \Rightarrow e^{x+y} + 2(x + y) = 0$$

Consideriamo la funzione $g(t) = e^t + 2t$. La sua derivata è sempre positiva quindi g è crescente. Ma allora visto che $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ abbiamo che g ammette esattamente uno zero che chiameremo $\bar{t}$. Ma allora l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \bar{t}\}$$

è un insieme in cui ogni punto al suo interno è un punto di minimo assoluto per f. Se invece abbiamo $x = y$ sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$e^{2x} + (2 + \alpha)x = 0$$

Consideriamo la funzione $h(t) = e^{2t} + (2 + \alpha)t$. La sua derivata è $h'(t) = e^{2t} + 2 + \alpha$. Se $\alpha > -2$ allora questa è sempre positiva e quindi h è sempre crescente. Ragionando come prima osserviamo che esiste un unica soluzione $\bar{t}$. Quindi se $-2 < \alpha < 2$ f ammette un unico minimo globale dato da $(x, y) = (\bar{t}, \bar{t})$. Ci resta da studiare il caso $\alpha = -2$. Ma allora dovremmo risolvere l'equazione

$$e^{2x} = 0$$

il che è impossibile.

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf