Esercizi visti il 14 novembre

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 7.2] Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{1}{2}} \text{ se } 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Stabilire se $f \in C^1(A)$.

ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$.

iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

Svolgimento. i) É chiaro che $f \in C^\infty(A \setminus \{(0,0)\})$. Vediamo che $f \in C(A)$ mostrando che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Passando in coordinate polari abbiamo

$$\left|\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta)(-\ln(\rho^2))^{\frac{1}{2}}\right| \le \left|\rho^2(-\ln(\rho^2))^{\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{2}\left|\rho^2\sqrt{|\ln(\rho)|}\right| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

Vediamo se esistono le derivate parziali: per $(x,y) \neq (0,0)$ possiamo con un conto "facile" trovarci le derivate parziali che sono

$$f_x(x,y) = -\frac{y((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)+x^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}}, \quad f_y(x,y) = -\frac{x((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}}$$

Vediamo che queste derivate sono continue anche in $(0,0)$. Calcoliamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$. Passando in coordinate polari abbiamo

$$\left|\frac{\rho\sin(\theta)(\rho^2\ln(\rho^2)+\rho^2\cos^2(\theta))}{\rho^2\sqrt{|\ln(\rho^2)|}}\right| \le \left|\frac{2\rho\ln(\rho)}{\sqrt{2}\sqrt{|\ln(\rho)|}}\right| + \left|\frac{\rho}{\sqrt{2}\sqrt{|\ln(\rho)|}}\right| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0$ Allo stesso modo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = 0$. Calcoliamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Quindi le derivate parziali del primo ordine sono continue su A e, in definitiva, $f \in C^1(A)$.

ii) Anche qui fuori da $(0,0)$ tutto va bene. Abbiamo che (con un conto "semplice")

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{xy(x^2-(x^2+3y^2)\ln(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{3}{2}}}, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{xy(y^2-(y^2+3x^2)\ln(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Calcoliamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0}\frac{f_y(0,h)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Facendo come prima passando in coordinate polari otteniamo

$$\left|\frac{\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)(\rho^2\cos^2(\theta)-(\rho^2\cos^2(\theta)+3\rho^2\sin^2(\theta))\ln(\rho^2))}{\rho^4(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos^2(\theta)-(\cos^2(\theta)+3\sin^2(\theta))\ln(\rho^2))}{(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \left|\frac{1}{(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| + 1000\left|\frac{\ln(\rho^2)}{(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

Lo stesso vale per f_{yy}: ciò ci dice che $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$.

iii) Vediamo che $f \notin C^2(A)$ studiamo f_{yx}. Abbiamo che lontano da $(0,0)$ si ha

$$f_{yx}(x,y) = \frac{-x^2y^2-(x^2+y^2)^2\ln^2(x^2+y^2)-(x^4+y^4)\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Vediamo che questa funzione non può essere estesa con continuità in $(0,0)$: prendiamo la traiettoria $y = x$: abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^4-(2x^2)^2\ln^2(2x^2)-(2x^4)\ln(2x^2)}{(2x^2)^2(-\ln(2x^2))^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{-1-4\ln^2(2x^2)-2\ln(2x^2)}{4(-\ln(2x^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Poniamo ora $t = -\ln(2x^2)$: se $x \to 0$ allora $t \to +\infty$: studiamo quindi il limite

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{-1-4t^2+2t}{4t^{\frac{3}{2}}} = -\infty$$

Quindi f_{yx} non può essere estesa in continuità in $(0,0)$: segue che $f \notin C^2(A)$.

□

Esercizio 2. [1, Esercizio 7.5] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)\cos(ny)}{n2^n}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Stabilire se esiste una costante $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ e $|y| < \delta$ allora si abbia $f(x,y) \geq x$.

Svolgimento. Abbiamo che

$$|f(x,y)| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{|\sin(nx)|}{n2^n}.$$

Ci restringiamo ora al caso in cui $x > 0$. Lì abbiamo che $\sin(nx) < nx$. Segue che

$$|f(x,y)| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{|\sin(nx)|}{n2^n} < \sum_{n\geq 1}\frac{nx}{n2^n} = x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n} = x$$

Ricapitolando se $x > 0$ si ha che

$$|f(x,y)| < x.$$

Ma allora ciò implica che se $x > 0$ allora

$$f(x,y) < x.$$

Quindi non possiamo mai avere un δ come nel testo dell'esercizio. □

Esercizio 3. [3, Esercizio di pagina 65] Sia $\beta \geq 0$ un parametro e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\beta |y|}{|x|+\sqrt{|y|}} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti i $\beta \geq 0$ tali che:

i) f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) f abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iv) f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Svolgimento. i) Abbiamo (siccome $\frac{|y|}{|x|+\sqrt{|y|}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{|y|}} = \sqrt{|y|}$) che

$$\frac{|x|^\beta |y|}{|x|+\sqrt{|y|}} \leq |x|^\beta \sqrt{|y|}$$

e se $\beta \geq 0$ questo tende sempre a 0 per $(x, y) \to (0, 0)$. In conclusione f è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$ per ogni $\beta \geq 0$.

ii) Dalla definizione di f si vede che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\})$ per ogni $\beta \geq 0$. Vediamo per quali β è continua ovunque. Osserviamo dal punto precedente che se $\beta > 0$ allora per $(x, y) \to (0, \overline{y})$ si ha che $f(x, y)$ tende a 0. Ci resta da capire cosa accade per $\beta = 0$. Vogliamo quindi studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,\overline{y})} \frac{|y|}{|x|+\sqrt{|y|}}$$

Scegliamo la traiettoria $(x, y) = (t, \overline{y})$. Studiamo quindi il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\overline{y}|}{|t|+\sqrt{|\overline{y}|}} = \sqrt{|\overline{y}|}$$

Ma se $\overline{y} \neq 0$ allora questo non è mai nullo. In definitiva f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $\beta > 0$.

iii) Fissiamo una direzione $\mathbb{R}^2 \ni v = (v_1, v_2)$. Dalla definizione di derivata direzionale studiamo quindi il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|hv_1|^\beta |hv_2|}{h(|hv_1| + \sqrt{|hv_2|})} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\beta+1}|v_1|^\beta |v_2|}{h|h|^{\frac{1}{2}}(|h|^{\frac{1}{2}}|v_1| + |v_2|^{\frac{1}{2}})} \tag{1}$$

Discutiamo a parte ora il caso in cui $v_2 = 0$. Allora abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

per ogni $\beta \geq 0$. Possiamo quindi restringerci al caso $v_2 \neq 0$. Ripartendo da (1) abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\beta+\frac{1}{2}}}{h} \lim_{h\to 0} \frac{|v_1|^\beta |v_2|}{|h|^{\frac{1}{2}}|v_1| + |v_2|^{\frac{1}{2}}} = \frac{|v_1|^\beta |v_2|}{|v_2|^{\frac{1}{2}}} \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\beta+\frac{1}{2}}}{h}.$$

Distinguiamo quindi tre casi: $\beta > \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$. Per $\beta > \frac{1}{2}$ è chiaro che questo limite esiste ed è sempre nullo, indipendentemente dal vettore v scelto. Per $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ è altrettanto chiaro che questo limite non esiste, ovvero la derivata direzionale non esiste. Analogamente per $\beta = \frac{1}{2}$ abbiamo che $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ non esiste. In definitiva f ammette qualsiasi derivata direzionale in $0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se $\beta > \frac{1}{2}$.

iv) Usiamo il test della differenziabilità: studiamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle f(0,0),(x,y)\rangle}{|(x,y)|}.$$

Dal punto iii) abbiamo che che dobbiamo restringerci al caso $\beta > \frac{1}{2}$ e in tal caso $\nabla f(0,0) = 0$. Ci resta da studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\beta |y|}{(|x| + \sqrt{|y|})\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Maggiorando come nel punto i) abbiamo

$$\frac{|x|^\beta |y|}{(|x| + \sqrt{|y|})\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|^\beta \sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^2)^{\frac{\beta}{2}}(y^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}.$$

Questo tende senz'altro a 0 quando $(x,y) \to (0,0)$ se $\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} > 0$ ovvero se $\beta > \frac{1}{2}$. In definitiva f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\beta > \frac{1}{2}$.

□

Esercizio 4. [3, Parte dell'esercizio di pagina 71] Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^4+|y|^3} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua.

Svolgimento. L'unico punto che ci crea problemi è l'origine: vogliamo quindi capire per quali $\alpha > 0$ si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Cerchiamo di escludere qualche caso prendendo delle traiettorie specifiche, ad esempio delle rette $(x,y) = (t, mt)$. Per comodità prendiamo sia m che t positivi. Studiamo quindi il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(mt)^\alpha}{t^4 + (mt)^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{\alpha+1}m^\alpha}{t^3(m^3+t)} = \lim_{t\to 0} t^{\alpha+1-3} \lim_{t\to 0} \frac{m^\alpha}{m^3+t} = m^{\alpha-3} \lim_{t\to 0} t^{\alpha-2}.$$

Se supponiamo che $\alpha < 2$ abbiamo che questo limite non è nullo: f non può essere continua; se $\alpha = 2$ abbiamo invece un limite che dipende da m e quindi dalla traiettoria scelta. Se invece $\alpha > 2$ allora il limite è nullo quindi f in quel caso *può* essere continua. Restringiamoci quindi al caso $\alpha > 2$. Abbiamo

$$\left|\frac{x|y|^\alpha}{x^4+|y|^3}\right| = \frac{|x||y|^\alpha}{x^4+|y|^3} = \frac{(x^4)^{\frac{1}{4}}(|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{x^4+|y|^3} \leq \frac{(x^4+|y|^3)^{\frac{1}{4}}(x^4+|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{x^4+|y|^3} = (x^4+|y|^3)^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{3}-1}.$$

Se mandiamo (x,y) a $(0,0)$ questa quantità tende senz'altro a 0 se $\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1 > 0$ ovvero se $\alpha > \frac{9}{4}$. Abbiamo quindi provato che f è continua se $\alpha > \frac{9}{4} > 2$. Ci resta da studiare il caso

$2 < \alpha \le \frac{9}{4}$. Calcoliamo il limite lungo una specifica traiettoria $(x, y) = (t, t^{\frac{4}{3}})$. Per comodità scegliamo $t > 0$. Studiamo quindi il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{t t^{\frac{4\alpha}{3}}}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} t^{1+\frac{4\alpha}{3}-4} \tag{2}$$

Ma se $\alpha \le \frac{9}{4}$ abbiamo per l'esponente di t che

$$1 + \frac{4\alpha}{3} - 4 \le 1 + \frac{9}{3} - 4 \le 0$$

e questo ci dice che il limite in (2) non è mai nullo per $\alpha \le \frac{9}{4}$. In definitiva f è continua se e solo se $\alpha > \frac{9}{4}$. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf`

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf`

[3] Roberto Monti, *Soluzioni manoscritte*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628809/mod_resource/content/1/Soluzioni_Esercizi.pdf`