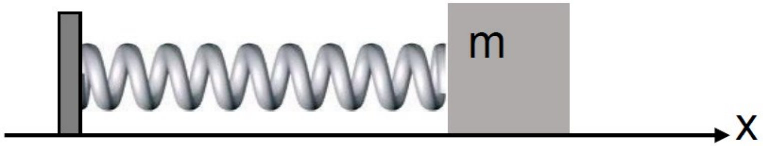
Dinamica del punto materiale : moto armonico, moto circolare, forza centripeta

Forza elastica e moto

$$F = ma \Rightarrow -kx = ma \qquad a = -\frac{k}{m}x$$



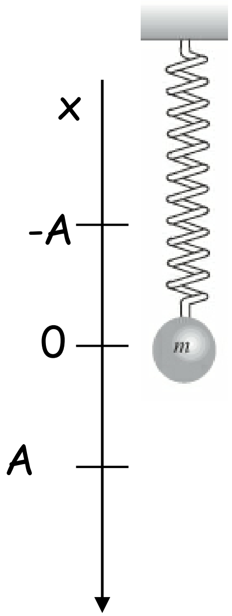
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

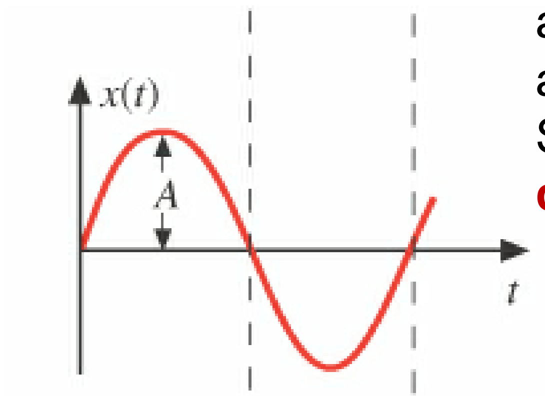
Una forza elastica genera un moto armonico

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ pulsazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ periodo

Il moto armonico





periodo T

Osserviamo il moto di una massa appesa ad una molla, la vediamo oscillare intorno alla posizione di riposo x=0.
Si tratta di un **moto armonico che è soluzione dell'equazione del moto.**

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$A : \text{ampiezza} \equiv \text{max. valore di } x$$

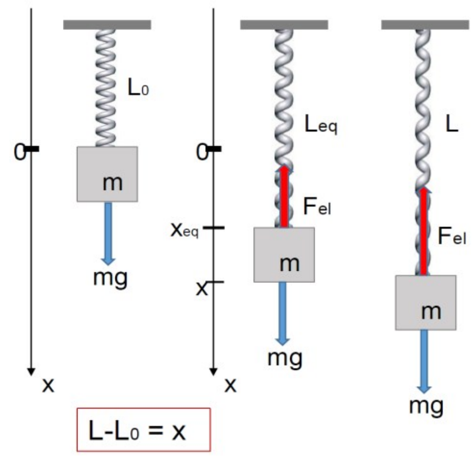
$$\omega t + \varphi : \text{fase}$$

$$\omega : \text{pulsazione}$$

$$\varphi : \text{fase iniziale} \equiv \text{fase per } t = 0$$

Forza elastica e forza peso

Oscillazione intorno al punto di equilibrio: $\boxed{x_{eq} = \frac{mg}{k}}$



Usando le condizioni iniziali determiniamo l'ampiezza A e la fase iniziale φ

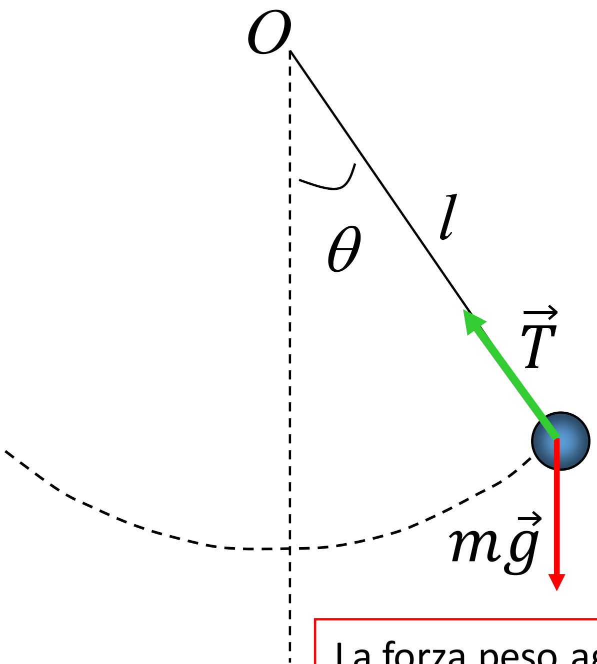
$$\boxed{x_0 = 0, v_0 = 0}$$

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + \dfrac{mg}{k} = 0 \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{A} = \frac{mg}{k}, \varphi = -\pi/2$$

Il pendolo semplice

Università degli Studi di Padova



La forza peso agisce come una forza di richiamo

Punto di massa m sospeso tramite un filo lungo l (inestensibile e di massa trascurabile), **si muove in un piano verticale lungo una circonferenza di raggio *l*.**

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Le componenti nella direzione tangente e ortogonale alla traiettoria sono:

$$-mg\sin\theta = ma_T$$

$$T - mg\cos\theta = ma_N$$

Il pendolo semplice

Università degli Studi di Padova

Usiamo la prima equazione e passiamo ad un sistema di riferimento di coordinate polari (l, θ):

$$-g\sin\theta = a_T = \alpha l = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

l'equazione del moto risultante è: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Nell'approssimazione di piccoli angoli *sen*$\theta \sim \theta$ $(\theta < 10°)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$

$\Downarrow$

Il pendolo si muove con moto armonico lungo un arco di circonferenza

Il pendolo semplice

La legge oraria sarà quindi del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

dove θ_0 e φ dipendono dalle condizioni iniziali

pulsazione: $$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

periodo: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

→ il periodo non dipende dall'ampiezza

<u>La velocità angolare è massima nel centro (punto più basso) e nulla agli estremi</u>

<u>Il moto NON è ad accelerazione costante</u>

Il pendolo semplice

Risolviamo la seconda equazione per calcolare la tensione

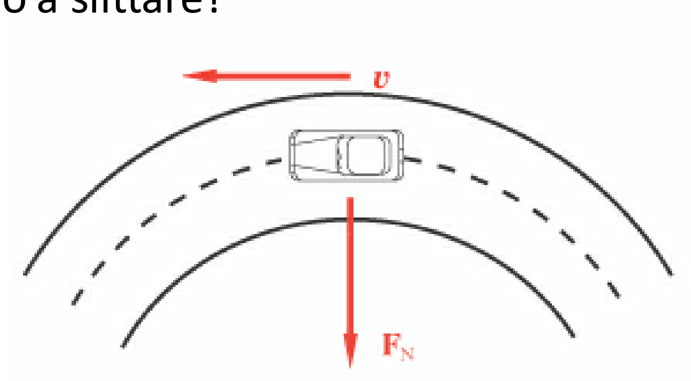
$$T = ma_N + mg\cos\theta = m\frac{v(t)^2}{l} + mg\cos\theta$$

- a_N non può essere nulla in quanto il moto è curvilineo
- a_N e' diretta verso il punto di sospensione
- La tensione è variabile durante il moto ma sempre non nulla

Forza centripeta

Università degli Studi di Padova

Un' auto compie una curva su strada piana di raggio r. Qual è la velocità massima oltre la quale le ruote cominciano a slittare?



L'attrito statico tra i pneumatici ed il terreno fornisce la forza centripeta necessaria a compiere una traiettoria lungo l'arco di circonferenza

$$F_N^{max} = \mu_s N = \mu_s mg = ma_N = m\frac{v_{max}^{\;2}}{r}$$

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s g\, r}$$