Lezione 9 (8 novembre 2023)

MEG (Metodo di Eliminazione di Gauss)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = A^{(1)} \qquad b = b^{(1)}$$

$$A^{(1)}x = b^{(1)}$$

La strategia del MEG è di trasformare A (o $A^{(1)}$) dopo $n-1$ passi, in una matrice triangolare superiore per poi applicare la sostituzione all'indietro

Dopo il 1° passo di eliminazione avremo

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(2)} = b_1^{(2)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)} = b_2^{(2)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ 0 + a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)} = b_n^{(2)} \end{cases}$$

Come passare da $A^{(1)}$ ad $A^{(2)}$?

Si individuano i MOLTIPLICATORI

$$m_{i,1} = \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad i = 2, \dots, n$$

(assumendo che $a_{11}^{(1)} \neq 0$)

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} a_{ij}^{(1)} & i = 1 \\ a_{ij}^{(1)} - m_{i1}\, a_{1j}^{(1)} & i = 2, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$b_i^{(2)} = \begin{cases} b_i^{(1)} & i = 1 \\ b_i^{(1)} - m_{i1}\, b_1^{(1)} & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Pertanto per k (indice di passo di eliminazione)

$$k = 1, \dots, n-1 \qquad \text{se } a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

1) Determino i moltiplicatori

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad i = k+1, \dots, n$$

2) i nuovi elementi di $A^{(k+1)}$ saranno

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & i \le k \\ a_{ij}^{(k)} - m_{ik}\, a_{kj}^{(k)} & i > k \\ & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$b_i^{(k+1)} = \begin{cases} b_i^{(k)} & i \le k \\ b_i^{(k)} - m_{ik}\, b_k^{(k)} & i > k \end{cases}$$

Dopo $n-1$ passi di eliminazione

$$\begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(n)} x_n = b_1^{(n)} \\ \qquad a_{22}^{(n)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(n)} x_n = b_2^{(n)} \\ \qquad\qquad \ddots \\ 0 \qquad\qquad a_{n-1,n-1}^{(n)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n)} x_n = b_{n-1}^{(n)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

Per trovare la soluzione basterà fare la sostituzione all'indietro

Se $a_{ii}^{(n)} \neq 0 \quad \forall i$ allora

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(n)}} \left\{ b_i^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} x_j \right\}$$

$i = n-1, \ldots, 1$

ELIMINAZIONE (MATLAB)

a(j,:)

```
for i=1:n-1        ← indice del passo di eliminazione
    for j=i+1:n
        m = a(j,i)/a(i,i);
k →     a(j,:) = a(j,:) - m*a(i,:);
        b(j) = b(j) - m*b(i);
    end
end
```

CALCOLO della COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE

Al passo i-esimo il costo è legato a 3 cicli

$$\underbrace{(n-i)}_{\text{ciclo } j}\underbrace{(n-i+1)}_{\substack{\text{ciclo su}\\ k}} + \underbrace{(n-i)}_{\substack{\text{ciclo su } j\\ \text{per i } b_j}}$$

$$(n-i)(n-i+2) \quad \text{costo al passo i-esimo}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(n-i+2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(n^2 + 2n - 2(n+1)i + i^2\right) \quad (1)$$

Ora usando le identità

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n\cdot(2n-1)}{6}$$

Sostituendo in (1) si ottiene

$$= n^2 - n + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$$

$$= O\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

Il costo della sostituzione è $O(n^2)$ che non cambia la complessità totale del MEG.

In definitiva il MEG ha complessità

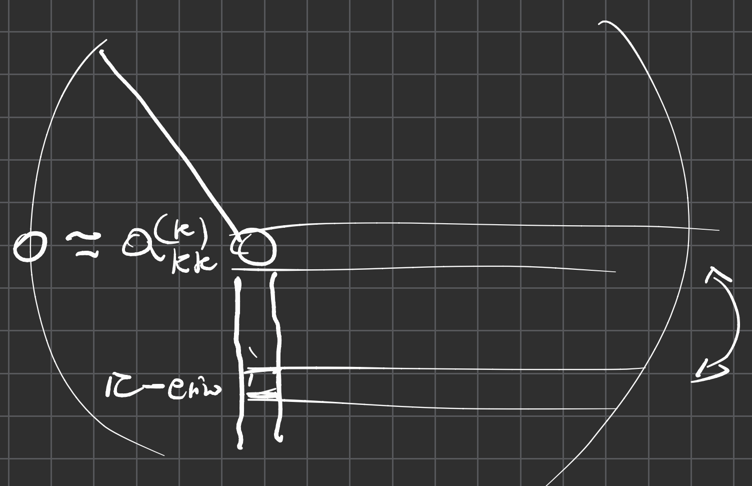
$$O\left(\frac{n^3}{3}\right) \text{ operazioni}$$

STRATEGIA del PIVOTING

Se al passo k di eliminazione

$$a_{kk}^{(k)} \simeq 0$$

si può applicare la strategia del pivot parziale per righe che consiste nel cercare dalla riga $k+1$ fino alla n-esima l'elemento più grande in modulo. Trovatolo si scambia la riga corrispondente con la k-esima



In MATLAB

```
[M, r] = max(abs(a(k+1:n, k)))
t = a(k,:);
a(k,:) = a(r,:);
a(r,:) = t;
```

Perché si usa questa strategia?

Perché riduce l'errore algoritmico e quindi maggiore stabilità del MEG.

$$\left| a_{r,k}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i \leq n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|$$

Allora gli elementi di $A^{(k+1)}$

$$\left| a_{ij}^{(k+1)} \right| = \left| a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \right|$$

$$\leq \left| a_{ij}^{(k)} \right| + \left| a_{kj}^{(k)} \right| \qquad (2)$$

perché grazie alla strategia del pivoting per righe $|m_{ik}| \leq 1$

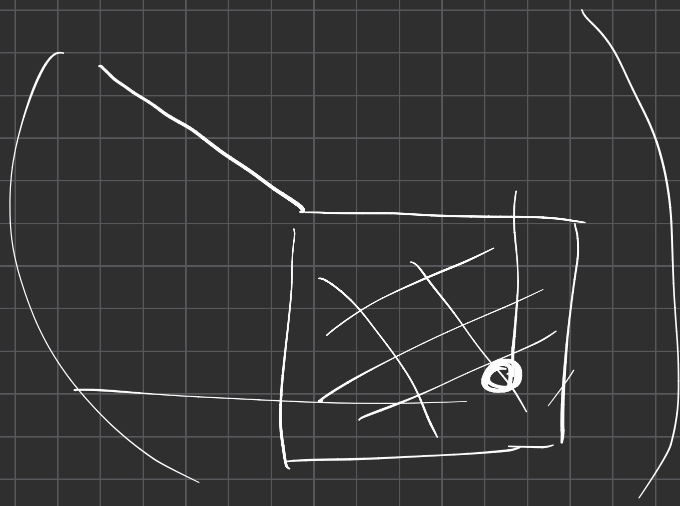
Detto poi $a_M^{(k)} = \max_{1 \leq i,j \leq n} \left| a_{ij}^{(k)} \right|$

dalla formula (2) deduciamo

$$a_M^{(n)} \leq 2\, a_M^{(n-1)} \leq 2^2 a_M^{(n-2)} \leq \dots \leq 2^{n-1} a_M^{(1)}$$

dove $a_M^{(1)}$ è l'elemento più grande di $A^{(1)} = A$

PIVOT TOTALE



$a(k+1:n, k+1:n)$

In MATLAB per risolvere un sistema lineare si può scrivere

$$Ax = b; \implies x = A\backslash b$$

(oppure $x = \underline{\underline{inv(A) * b}}$)

TEOREMA LU

Data A $n \times n$ siano A_k $k=1,..,n$ le sottomatrici principali di testa

ovvero

$$A_1 = (a_{11}) \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & \ddots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

e $A_n = A$

Se $|A_k| \neq 0$ $\quad k = 1, \ldots, n$

allora esiste UNICA la fattorizzazione $A = LU$ con

L = matrice triangolare inferiore con 1 sulla diagonale

U = triangolare superiore

Altrimenti esiste una matrice di permutazione (con elementi 0 o 1) t.c. $PA = LU$

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema LU

Infatti

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{U}$$

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

se scambiamo la riga 2 con la 3 ovvero premoltiplichiamo A per

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(cioè matrice identità dove ho scambiato 2ª e 3ª riga)

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

posso applicare LU

Nota si sarebbe potuto applicare anche un'altra permutazione

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{scambio di } 1^a \text{ e } 3^a \text{ riga})$$

Osservazione

$$\det(A) = \det(LU) = \underbrace{\det(L)}_{1} \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

$$\det(PA) = \underbrace{\det(P)}_{\pm 1} \det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

$\boxed{\text{MEG è EQUIVALENTE alla fattorizzazione LU di A.}}$

Matrici elementari di Gauss

Il generico passo di eliminazione equivale alla pre-moltiplicazione di A per una matrice elementare di Gauss

$$M_k = I - m_k e_k^T$$

$$m_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{pmatrix} \qquad e_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -m_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

colonna k-esima

$$\underbrace{M_{n-1}\cdots\cdots M_2 M_1}\, A = \underbrace{A^{(n)}}_{\text{triangolare superiore}}$$

$$L = \left(M_{n-1}\cdots M_2 M_1\right)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$$

$$\Longrightarrow \qquad A = L \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ A^{(n)}}}{U}$$

Di più si può provare che

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & m_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice dei moltiplicatori

$$\Longrightarrow \qquad \det(A) = \det(LU) = \underbrace{\det L}_{1}\ \underbrace{\det U}_{\prod u_{ii}}$$