Esercizi visti il 7 novembre

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 4.2] Sia $g \in C([0,1])$ una funzione continua fissata

i) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C([0,1])$ dell'equazione funzionale

$$y(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}}dt + g(x)$$

ii) Calcolare la soluzione nel caso $g(x) = x$.

Svolgimento. i) Vediamo che l'applicazione $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$ definita come

$$\Phi(y(x)) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}}dt + g(x)$$

è una contrazione.

$$\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_{C([0,1])} = \left\| \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y_1(t)}{\sqrt{t}}dt + g(x) - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y_2(t)}{\sqrt{t}}dt - g(x) \right\|_{C([0,1])} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\| \int_0^x \frac{y_1(t) - y_2(t)}{\sqrt{t}}dt \right\|_{C([0,1])} \leq \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \|y_1 - y_2\|_{C([0,1])} = \frac{2}{3}\|y_1 - y_2\|_{C([0,1])}$$

Φ è una contrazione e dunque ammette un unico punto fisso (per il teorema di Banach) che è la soluzione cercata.

ii) Deriviamo l'equazione e otteniamo

$$y'(x) = \frac{1}{3}\frac{y(x)}{\sqrt{x}} + 1$$

Questa è una ODE lineare del primo ordine:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

con

$$a(x) = -\frac{1}{3\sqrt{x}}, \quad b(x) = 1$$

sappiamo che la sua soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int_0^x b(s)e^{A(s)}ds\right)$$

con

$$A(x) = \int_0^x a(s)ds$$

abbiamo che (a meno di costanti)

$$A(x) = \int_0^x -\frac{1}{3\sqrt{s}} ds = -\frac{2}{3}\sqrt{x}$$

quindi

$$y(x) = e^{\frac{2\sqrt{x}}{3}} \int_0^x e^{-\frac{2\sqrt{s}}{3}} ds$$

infine

$$y(x) = e^{\frac{2\sqrt{x}}{3}} \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2} e^{\frac{-2\sqrt{x}}{3}} (2\sqrt{x} + 3) \right)$$

ovvero

$$y(x) = \frac{9}{2} e^{\frac{2\sqrt{x}}{3}} - 3\sqrt{x} - \frac{9}{2}$$

□

Esercizio 2. [1, Esercizio 4.4] Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$\sin(x) + \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \alpha f(x), \quad x \in [0, 1]$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0, 1])$.

ii) Provare che per $|\alpha| \leq 1$ l'equazione non ha soluzione.

Svolgimento. i) Deriviamo l'equazione funzionale ottenendo

$$\cos(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = \alpha f'(x)$$

Visto che $|\alpha| > 1$ in particolare $\alpha \neq 0$ quindi possiamo definire il funzionale $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ definito come

$$\Phi(f(x)) = \frac{\cos(x) + \sqrt{1 + f(x)^2}}{\alpha}$$

Vediamo che è una contrazione.

$$\|\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\|_\infty = \frac{1}{|\alpha|} \| \cos(x) + \sqrt{1 + f_1(x)^2} - \cos(x) - \sqrt{1 + f_2(x)^2} \|_\infty =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \left\| \frac{(\sqrt{1 + f_1^2} - \sqrt{1 + f_2^2})(\sqrt{1 + f_1(x)^2} + \sqrt{1 + f_2^2})}{\sqrt{1 + f_1^2} + \sqrt{1 + f_2^2}} \right\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \left\| \frac{f_1^2 - f_2^2}{\sqrt{1 + f_1^2} + \sqrt{1 + f_2^2}} \right\|_\infty \leq \frac{1}{|\alpha|} \left(\|f_1 - f_2\|_\infty \left\| \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{1 + f_1^2} + \sqrt{1 + f_2^2}} \right\|_\infty \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\alpha|} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Quindi se $|\alpha| > 1$ Φ è una contrazione e siccome $C([0, 1])$ è uno spazio metrico completo Φ ha esattamente un unico punto fisso. Sia quindi $g \in C([0, 1])$ tale che $\Phi(g) = g$. La soluzione dell'equazione funzionale è data dalla f definita come

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

ii) Deriviamo l'equazione ottenendo

$$\cos(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = \alpha f'(x) \tag{1}$$

ovvero

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \alpha f'(x) - \cos(x)$$

Eleviamo al quadrato ottenendo

$$1 + f'(x)^2 = \alpha^2 f'(x)^2 + \cos^2(x) - 2\alpha \cos(x) f'(x)$$

i.e.

$$(\alpha^2 - 1) f'(x)^2 - 2\alpha \cos(x) f'(x) + \cos^2(x) - 1 = 0 \tag{2}$$

che è un'equazione di secondo grado rispetto a $f'(x)$. Escludiamo prima il caso in cui $\alpha = \pm 1$. Se $\alpha = 1$ l'equazione (2) diventa

$$-2\cos(x) f'(x) + \cos^2(x) - 1 = 0$$

ovvero

$$-2\cos(x) f'(x) - \sin^2(x) = 0$$

i.e.

$$f'(x) = -\frac{\sin^2(x)}{2\cos(x)}$$

da cui osserviamo che (siccome $x \in [0,1]$) f' è sempre negativa. Ma ciò è assurdo visto che nell'equazione (1) abbiamo che il lato sinistro dell'equazione è sempre positivo. Vediamo il caso $\alpha = -1$. L'equazione (2) diventa

$$2\cos(x) f'(x) - \sin^2(x) = 0$$

ovvero

$$f'(x) = \frac{\sin^2(x)}{2\cos(x)}$$

da cui osserviamo che (siccome $x \in [0,1]$) f' è sempre positiva. Ma ciò è assurdo visto che nell'equazione (1) abbiamo che il lato sinistro dell'equazione è sempre positivo. Ci resta da veedere il caso quando $|\alpha| < 1$. Risolviamo l'equazione (2) rispetto a $f'(x)$ ottenendo

$$f'(x) = \frac{2\alpha \cos(x) \pm \sqrt{4(\alpha^2 - \sin^2(x))}}{2(\alpha^2 - 1)} = \frac{\alpha \cos(x) \pm \sqrt{(\alpha^2 - \sin^2(x))}}{\alpha^2 - 1}. \tag{3}$$

Osserviamo ora che f' non può avere zeri: supponiamo ci sia un $s \in [0,1]$ tale che $f'(s) = 0$ allora sostituendo in (1) avremmo

$$\cos(s) + \sqrt{1 + f'(s)^2} = \alpha f'(s) \Rightarrow \cos(s) + 1 = 0$$

il che è assurdo visto che $s \in [0,1]$. Calcoliamo ora $f'(0)$ con la formula che abbiamo ricavato in (3):

$$f'(0) = \frac{\alpha \pm |\alpha|}{\alpha^2 - 1}$$

Per comodità distinguiamo ora i due casi $0 < \alpha < 1$ e $-1 < \alpha < 0$. (Il caso $\alpha = 0$ è banale visto che in (1) avremmo qualcosa di positivo al membro di sinistra uguale a 0 a destra). Se $0 < \alpha < 1$ abbiamo che dobbiamo sempre scegliere la soluzione con il $+$ in (3) (altrimenti avremmo $f'(0) = 0$). Ma la soluzione con il $+$ è sempre negativa quindi anche qui otterremo un assurdo in (1). Ci resta da vedere il caso $-1 < \alpha < 0$. Qui invece ci tocca scegliere la soluzione con il $-$ in (3) (altrimenti avremmo $f'(0) = 0$). Vediamo che allora in questo caso f' è sempre positiva (ottenendo anche qui una contraddizione in (1)). Visto che $\alpha^2 - 1 < 0$ ci resta da mostrare che $\alpha\cos(x) - \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(x)} < 0$ ovvero che

$$\alpha\cos(x) < \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(x)}$$

ma ciò è triviale visto che il lato sinistro della disuguaglianza è sempre negativo e il lato destro è sempre positivo. (Notare che in questo esercizio abbiamo sempre assunto di poter estrarre la radice in (3); se non l'avessimo potuto fare tanto meglio, la soluzione comunque non sarebbe esistita).

□

Esercizio 3. [1, Esercizio 5.1] Sia $V = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0, \mathrm{Lip}(f) \leq 1\}$. Provare che V è un sottoinsieme compatto di $C([0,1])$.

Svolgimento. Visto che $[0,1]$ è uno spazio metrico compatto vogliamo usare il Teorema di Ascoli-Arzelà (vedi [2, Teorema 4.2.2]). In altre parole se mostriamo che V è chiuso, equilimitato ed equicontinuo abbiamo concluso. Mostriamo che V è chiuso. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ una successione convergente ad una certa $\overline{f}$. Proviamo che $\overline{f} \in V$. Visto che $C([0,1])$ è uno spazio metrico completo abbiamo che $\overline{f} \in C([0,1])$. Se $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{f}$ segue che per ogni $x \in [0,1]$ si ha che $f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{f}(x)$ e in particolare per $x = 0$ si ha $0 = f_n(0) \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{f}(0)$ da cui segue che $\overline{f}(0) = 0$. Infine abbiamo che $\mathrm{Lip}(\overline{f}) \leq 1$ visto che per ogni $x, y \in [0,1]$ si ha

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|.$$

Vediamo che V è equilimitato ovvero che esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$\sup_{f\in V} \|f\|_{C([0,1])} \leq M$$

ovvero

$$\sup_{f\in V}\left(\max_{x\in[0,1]} |f(x)|\right) \leq M.$$

Osserviamo che siccome $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$ segue che per ogni $f \in V$, $x, y \in [0,1]$ si ha che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \leq 1$$

Ma se fissiamo $y = 0$ otteniamo che per ogni $x \in [0,1]$, $f \in V$ si ha che

$$|f(x)| \leq |x| \leq 1$$

ovvero V è equilimitato con costante $M = 1$. Vediamo che V è equicontinuo ovvero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\text{per ogni } x, y \in [0,1], |x - y| < \delta \text{ si ha che } \sup_{f\in V} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Infatti se $f \in V$, $x, y \in [0,1]$, $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ si ha che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Esercizio 4. [1, Esercizio 5.6] Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $k : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt, \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \to T(f)(s)$ è continua su $[0,1]$.

ii) Provare che $T \in \mathcal{L}(X,X)$.

iii) Dare condizioni su k affinchè T sia una contrazione.

iv) Sia $K \subseteq X$ limitato. Stabilire se $\overline{T(K)}$ è compatto.

Svolgimento. i) Visto che k è continua abbiamo, per il teorema di Heine-Cantor (vedi [2, Teorema 3.5.6]), che è uniformemente continua sul compatto $[0,1]^2$. Ciò vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in [0,1]^2$, $|(s_1,t_1)-(s_2,t_2)| < \delta$ si ha che

$$|k(s_1,t_1) - k(s_2,t_2)| < \varepsilon$$

Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$. Ma allora segue che esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $s_1, s_2 \in [0,1], |s_1 - s_2| < \delta$

$$|T(f)(s_1) - T(f)(s_2)| \le \int_0^1 |k(s_1,t) - k(s_2,t)||f(t)|dt \le \varepsilon \int_0^1 |f(t)|dt \le \varepsilon \|f\|_{C([0,1])}.$$

ii) Vediamo che T è lineare: siano $f, g \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abbiamo per ogni $s \in [0,1]$ che

$$T(\alpha f + \beta g)(s) = \int_0^1 k(s,t)(\alpha f + \beta g)(t)dt =$$

$$= \alpha \int_0^1 k(s,t)f(t)dt + \beta \int_0^1 k(s,t)g(t)dt = \alpha T(f)(s) + \beta T(g)(s).$$

Vediamo che T è limitato: abbiamo che

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|Tf\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{s\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(s,t)f(t)dt \right| \le \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|dt \le \|k\|_\infty < +\infty.$$

iii) Visto che per ogni $f \in X$ abbiamo $\|T(f)\|_\infty \le \|T\|\|f\|_\infty \le \|k\|_\infty \|f\|_\infty$ segue che T è una contrazione se $\|k\|_\infty < 1$.

iv) Vogliamo rispondere usando il teorema di Ascoli-Arzelà. Possiamo applicarlo perchè $\overline{T(K)} \subseteq C([0,1])$ e $[0,1]$ è uno spazio metrico compatto. Abbiamo che $\overline{T(K)}$ è compatto se e soltanto se è chiuso (e lo è per definizione), equilimitato ed equicontinuo. Vediamo che è equilimitato. Vogliamo mostrare che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $f \in \overline{T(K)}$ si abbia $\|f\|_\infty \le M$. Se $f \in \overline{T(K)}$ allora esiste una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(K)$ tale che $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$. Ma allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una $g_n \in K$ tale che $T(g_n) = f_n$. Ma allora

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|T(g_n)\|_\infty \le \lim_{n\to+\infty} \|T\|\|g_n\|_\infty \le \|k\|_\infty \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty.$$

Ma visto che K è limitato esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $g \in K$ si ha $\|g\|_\infty \leq M$ e allora segue che

$$\|f\|_\infty \leq \|k\|_\infty \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty \leq \|k\|_\infty M.$$

Vediamo che è anche equicontinuo e quindi, in definitiva, compatto. Vogliamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [0,1]$, $|x-y| < \delta$ si ha che

$$\sup_{f\in\overline{T(K)}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Se $f \in \overline{T(K)}$ allora esiste una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(K)$ tale che $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$. Ma allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una $g_n \in K$ tale che $T(g_n) = f_n$. Ma allora segue che

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to+\infty} |T(g_n)(x) - T(g_n)(y)|$$

Ma possiamo fare come abbiamo fatto nel punto $i)$ e quindi abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ (che dipende unicamente dalla k fissata e non dalla scelta di f) tale che se $|x-y| < \delta$ allora si ha

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to+\infty} |T(g_n)(x) - T(g_n)(y)| \leq \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\|g_n\|_\infty \leq M\varepsilon.$$

dove M è la stessa costante di prima. La tesi segue dall'arbitrarietà di ε.

$\square$

Esercizio 5. [1, Esercizio 6.4] Calcolare tutti gli $m, n \in \mathbb{N}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m y^n}{x^2+y^2} \text{ se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 \text{ se } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

1) abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$;

2) sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Svolgimento. 1) Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Abbiamo che se esiste la derivata direzionale di f in $(0,0)$ in direzione v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{m+n} v_1^m v_2^n}{h(h^2v_1^2 + h^2v_2^2)} = \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2+v_2^2} \lim_{h\to 0} h^{m+n-3}$$

Escludiamo preliminarmente il caso in cui $v = (0,0)$: in questo caso per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0.$$

Vediamo invece cosa accade per $v \neq (0,0)$. In questo caso abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2+v_2^2} \lim_{h\to 0} h^{m+n-3} = \begin{cases} 0 \text{ se } m+n-3 > 0 \\ \frac{v_1^m v_2^m}{v_1^2+v_2^2} \text{ se } m+n-3 = 0 \\ \text{diverge se } m+n-3 < 0. \end{cases}$$

In definitiva il limite esiste ed è finito se e solo se $m+n \geq 3$.

2) Se f è differenziabile allora

$$v \to \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = df(0,0)(v)$$

deve essere lineare. Ma se $m+n=3$ abbiamo visto che questo non è il caso. Ci resta da vedere il caso $m+n>3$. Usiamo il test della differenziabilità (vedi [2, Osservazione 6.4.7]). (Osserviamo intanto che $\nabla f(0,0)=(0,0)$). Calcoliamo

$$\left| \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(x,y)-(0,0)\rangle}{|(x,y)-(0,0)|} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\frac{x^m y^n}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

Osserviamo ora che

$$|x|^m = (x^2)^{\frac{m}{2}} \le (x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$$

e che

$$|y|^n = (y^2)^{\frac{n}{2}} \le (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$$

da cui segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{m+n-3}{2}}$$

Ma visto che $m+n-3>0$ segue che il limite è 0. In definitiva f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $m+n>3$.

$\square$

Esercizio 6. [1, Esercizio 6.5] Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^6}{x^6+y^8} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.

2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento. 1) f è liscia per definizione fuori dall origine quindi ci basta verificare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Abbiamo che

$$\left| \frac{x^2y^6}{x^6+y^8} \right| = \left| \frac{(x^6)^{\frac{2}{6}}(y^8)^{\frac{6}{8}}}{x^6+y^8} \right| \le \left| \frac{(x^6+y^8)^{\frac{2}{6}}(x^6+y^8)^{\frac{6}{8}}}{x^6+y^8} \right| = (x^6+y^8)^{\frac{2}{6}+\frac{6}{8}-1} = (x^6+y^8)^{\frac{1}{12}}$$

da cui è chiaro che il limite per $(x,y)\to(0,0)$ è 0.

2) Usiamo il criterio di differenziabilità. Sugli assi f è identicamente nulla quindi abbiamo anche $\nabla f(0,0)=(0,0)$ e ci resta da verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|} = 0.$$

Studiamo quindi

$$\frac{x^2y^6}{(x^6+y^8)\sqrt{x^2+y^2}}$$

prendiamo la traiettoria $(x,y)=(t,t^{\frac{3}{4}})$ per $t>0$. Abbiamo

$$\frac{t^2 t^{\frac{9}{2}}}{(t^6+t^6)\sqrt{t^2+t^{\frac{3}{2}}}}=\frac{t^{2+\frac{9}{2}-6}}{2\sqrt{t^{\frac{3}{2}}(t^{2-\frac{3}{2}}+1)}}=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{3}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}}+1}}=\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{t^{\frac{1}{2}}+1}}\xrightarrow{t\to 0}\infty.$$

da cui f non è differenziabile in $(0,0)$.

$\square$

Esercizio 7. [1, Esercizio 6.7, Formula di Eulero] Una funzione $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha\in\mathbb{R}$ se $f(tx)=t^\alpha f(x)$ per ogni $x\neq 0$ e $t>0$. Provare che se $f\in C^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha-1$. Verificare inoltre che, per $x\neq 0$

$$\langle\nabla f(x),x\rangle=\alpha f(x).$$

Svolgimento. Sia f una funzione positivamente omogenea di grado α. Abbiamo che per ogni $x\neq 0$, $t>0$

$$\partial_{x_i}f(tx)=\lim_{h\to 0}\frac{f(tx+h\vec{e_i})-f(tx)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{t^\alpha f\left(x+\frac{h}{t}\vec{e_i}\right)-t^\alpha f(x)}{h}=$$

$$=t^\alpha\lim_{h\to 0}\frac{1}{t}\frac{f\left(x+\frac{h}{t}\vec{e_i}\right)-f(x)}{h/t}=t^{\alpha-1}\lim_{(h/t)\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{t}\vec{e_i}\right)-f(x)}{h/t}=t^{\alpha-1}\partial_{x_i}f(x).$$

Fissiamo $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ e defininiamo la funzione $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ come

$$g(t)=f(tx)-t^\alpha f(x).$$

Siccome f è omogeneo abbiamo che g è identicamente nulla e lo stesso dicasi per la sua derivata g'. Deriviamo rispetto a t ottenendo

$$0=g'(t)=\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}f(tx)x_i-\alpha t^{\alpha-1}f(x).$$

Scegliendo $t=1$ otteniamo

$$0=\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}f(x)x_i-\alpha f(x).$$

ovvero

$$\langle\nabla f(x),x\rangle=\alpha f(x).$$

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf`

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf`