Incontro del 24 ottobre

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 2.3] Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se X è compatto allora K è compatto.

Svolgimento. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione. Ma allora è una successione anche in X che è compatto quindi ammette una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $x_{n_j} \xrightarrow{j\to+\infty} \overline{x} \in X$. Ma $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente contenuta in K che è un chiuso quindi $\overline{x} \in K$ da cui la tesi. $\square$

Esercizio 2. [1, Esercizio 2.4] Provare che il seguente insieme è compatto nella topologia standard di $\mathbb{C}$:

$$K = \left\{ \frac{1+ni}{n+i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{i\}.$$

Provare l'affermazione sia con la definizione di compattezza per ricoprimenti sia con la definizione di compattezza sequenziale.

Svolgimento. Scriviamo in maniera più comoda K:

$$\frac{1+ni}{n+i} = \frac{(1+ni)(n-i)}{(n+i)(n-i)} = \frac{n-i+n^2i+n}{n^2+1} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{n^2-1}{n^2+1}i$$

Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definita come $f(n) = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{n^2-1}{n^2+1}i$. Vediamo che K è compatto tramite la definizione di compattezza sequenziale. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione. Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $m_n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = f(m_n)$. Quindi possiamo pensare alla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come $(f(m_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Vediamo che ammette una sottosuccessione convergente: se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene infiniti termini uguali tra di loro allora prendo quella sequenza per sottosuccessione (che essendo costante è banalmente convergente). Se invece non ci sono infiniti termini uguali tra loro prendiamo una sottosuccessione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ costruita così: $b_1 = a_1 = f(m_1)$ per b_2 prendo il primo termine $a_k = f(m_k)$ tale che $m_k > m_1$ e così via... Allo stesso modo per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $j_n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n = f(j_n)$. Ma in questa successione abbiamo che $j_n < j_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora questa successione è convergente perchè o è costante (almeno da un certo punto in poi), e allora abbiamo concluso, oppure abbiamo che $j_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ e allora

$$\frac{2n}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+1}i \xrightarrow{n\to+\infty} 0 + 1i.$$

Ma $i \in K$ quindi K è compatto. Vediamo che K è compatto tramite la definizione di compattezza per ricoprimenti. Sia $(U_j)_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di K. Allora esiste un raggio $r > 0$ e un $\overline{j} \in J$ tale che

$$U_{\overline{j}} \supseteq B(i, r) \ni i.$$

Ma siccome abbiamo già visto che $f(n) \xrightarrow{n\to+\infty} i$ allora esiste un $n_r \in \mathbb{N}$ tale che $|f(n_r) - i| < r$ per ogni $n > n_r$. Ma allora considero un U_{j_1} tale che $f(1) \in U_{j_1}$ e così via fino ad $n_r - 1$. Il ricoprimento finito cercato è quello dato da $U_{j_1}, U_{j_2}, ..., U_{j_{n_r-1}}, U_{\overline{j}}$. $\square$

Esercizio 3. [1, Esercizio 2.7] Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e bigettiva. Provare che se X è compatto allora la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Svolgimento. Osserviamo che equivale a mostrare che f è una mappa aperta ovvero che per ogni aperto $A \subseteq X$ si ha che $f(A)$ è aperto in Y. Ma visto che f è bigettiva ciò equivale a mostrare che f è una mappa chiusa ovvero che per ogni chiuso $C \subseteq X$ si ha che $f(C)$ è chiuso in Y. Vediamo perchè: sia $C \subseteq X$ un chiuso ed f una mappa aperta e bigettiva, mostriamo che è f è una mappa chiusa (l'implicazione inversa è analoga). Abbiamo che $f(X \setminus C)$ è aperto in Y ma visto che f è bigettiva segue che $f(X \setminus C) = f(X) \setminus f(C) = Y \setminus f(C)$ ma visto che $Y \setminus f(C)$ è aperto segue che $f(C)$ è chiuso. Tornando all'esercizio sia quindi $C \subseteq X$ un chiuso. Per [1, Esercizio 2.3] C è anche un compatto in X. Ma per [2, Teorema 3.5.1] $f(C)$ è un compatto in Y e quindi è chiuso. $\square$

Esercizio 4. [1, Esercizio 3.1 (il primo di quelli di base)] Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

Svolgimento. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione di Cauchy: dobbiamo mostrare che tale successione è convergente. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in K allora lo sarà anche in X, ma X è completo dunque esiste $\overline{x} \in X$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{x}$. Se mostriamo che $\overline{x} \in K$ abbiamo concluso ma ciò è vero visto che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ allora $\overline{x} \in \overline{K}$ ma K è chiuso quindi $\overline{K} = K$. $\square$

Esercizio 5. [1, Esercizio 3.1 (il primo degli intermedi)] Provare che lo spazio $C([0, 1])$ con la distanza data dalla norma integrale

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

non è uno spazio metrico completo.

Svolgimento. Dobbiamo trovare una successione di Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([0, 1])$ non convergente. Prendiamo la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

è chiaro che $f_n \in C([0, 1])$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vediamo che la successione è di Cauchy: siano $n, m \in \mathbb{N}, n > m$; vediamo che

$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |n(x - \tfrac{1}{2}) - m(x - \tfrac{1}{2})|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |1 - m(x - \tfrac{1}{2})|dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (n-m)(x-\tfrac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (1-mx+\tfrac{m}{2}))dx = (n-m)\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} + \left[x - \frac{mx^2}{2} + \frac{mx}{2}\right]_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} =$$

$$= \frac{n-m}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)\right] +$$

$$-\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{n-m}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2m} + \frac{m}{2n^2} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right).$$

Quindi risulta chiaro che la successione è di Cauchy; vediamo che non è convergente. Ragioniamo per assurdo e supponiamo esista $f \in C([0,1])$ che sia il limite della successione. Dobbiamo quindi avere che $d(f_n, f) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ ovvero che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f(x) - n(x-\tfrac{1}{2})|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |f(x)-1|dx\right) = 0$$

In particolare ciò implica che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = 0 \text{ e } \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)-1|dx = 0$$

Ma ciò ci conduce all'assurdo visto che f è continua in ogni punto di $[0,1]$ e quindi anche in $\frac{1}{2}$. Ma dalla prima condizione abbiamo che $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = 0$ mentre dalla seconda che $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = 1$. □

Esercizio 6. [1, Esercizio 3.4] Definiamo la funzione $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,+\infty)$

$$d(x,y) = |e^x - e^y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.

iii) Determinare il completamento di $(\mathbb{R}, d)$.

Svolgimento. i) Vediamo che d è una distanza: è chiaro che $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Supponiamo invece che $d(x,y) = 0$ ovvero che $|e^x - e^y| = 0$. Ma allora

$$0 = |e^x - e^y| = e^x|1 - e^{y-x}| \Rightarrow 1 - e^{y-x} = 0 \Rightarrow e^{y-x} = 1 \Rightarrow y = x.$$

Ci resta da vedere la disuguaglianza triangolare: siano $x, y, z \in \mathbb{R}$: abbiamo che

$$d(x,y) = |e^x - e^y| = |e^x - e^z + e^z - e^y| \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y| = d(x,z) + d(z,y).$$

ii) Cerchiamo una successione di Cauchy che non sia convergente. Prendiamo per $n \in \mathbb{N}$ la successione $x_n = -n$. Vediamo che è di Cauchy: siano $m, n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$d(x_n, x_m) = |e^{-n} - e^{-m}|$$

da cui è chiaro che la successione è di Cauchy. Vediamo che invece non converge: ragioniamo per assurdo e supponiamo esista $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{x}$. Ma allora

$$d(x_n, \overline{x}) = |e^{-n} - e^{\overline{x}}| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

implica che $e^{\overline{x}} = 0$ il che è assurdo.

iii) Consideriamo una coppia (Y, d_Y) dove $Y = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e d_Y è definita come d e in più la estendiamo su Y con la convenzione che $e^{-\infty} = 0$. É chiaro che (Y, d_Y) è uno spazio metrico; mostriamo che (Y, d_Y) è il completamento di $(\mathbb{R}, d)$ ovvero che soddisfa le condizioni in [2, Definizione 3.1.4]. Proviamo che (Y, d_Y) è completo. Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una successione di Cauchy. Mostriamo che è convergente. Consideriamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ come $a_n = e^{y_n}$: abbiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, +\infty)$. Ma allora la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$; quindi coverge nella chiusura di $[0, +\infty)$ che coincide con sè stesso ovvero esiste un $\overline{a} \in [0, +\infty)$ tale che $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{a}$. Ora siccome l'applicazione $\exp : Y \to [0, +\infty)$ è bigettiva segue che esiste un $\overline{y} \in Y$ tale che $\overline{a} = e^{\overline{y}}$. Ma allora segue che $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{y}$ rispetto a d_Y. Ci resta da vedere che esiste un'isometria $f : \mathbb{R} \to Y$ tale che $\overline{f(\mathbb{R})} = Y$. Ci basta prendere $f(r) = r$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

□

Esercizio 7. [1, Esercizio 3.6] Siano $X = (-1, +\infty)$ e $d : X \times X \to [0, +\infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\right|, \quad x, y \in X.$$

1. Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
2. Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$,$d(\varphi(t), \varphi(s)) = |t - s|$ con $s, t \in \mathbb{R}$.
3. Provare che (X, d) è uno spazio metrico completo.

Svolgimento. 1. Vediamo che d è una distanza: è chiaro che per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Ci resta da mostrare la disuguaglianza triangolare. Siano $x, y, z \in X$. Abbiamo che

$$d(x, y) = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+z}\frac{1+z}{1+y}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+z}\right) + \ln\left(\frac{1+z}{1+y}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+z}\right)\right| + \left|\ln\left(\frac{1+z}{1+y}\right)\right| = d(x, z) + d(z, y).$$

2. Vediamo che l'applicazione $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$ definita come

$$\varphi(x) = e^x - 1$$

è un'isometria suriettiva. Siano $s, t \in \mathbb{R}$: abbiamo che

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) = d(e^s - 1, e^t - 1) = \left|\ln\left(\frac{e^s}{e^t}\right)\right| = |s - t|.$$

La suriettività segue dal fatto che exp è suriettiva come applicazione da $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ (e quindi φ lo è da $\mathbb{R} \to (-1, +\infty)$).

3. Segue immediatamente dal punto precedente visto che $\mathbb{R}$ è completo ed isometrico ad (X, d).

□

Esercizio 8. [1, Esercizio 3.8] Lo spazio $l^\infty(\mathbb{R})$ introdotto nell'Esercizio 1.5 è uno spazio di Banach non separabile (non ha sottoinsiemi densi numerabili).

Svolgimento. Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ definiamo la succesisone $(\chi_n^A)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$ definita come

$$\chi_n^A = \begin{cases} 0 \text{ se } n \notin A \\ 1 \text{ se } n \in A \end{cases} .$$

Consideriamo ora l'insieme $X = \{(\chi_i^A)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } A \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq l^\infty(\mathbb{R})$. X è un sottoinsieme non numerabile (visto che lo è l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$). Osserviamo ora che se $A \neq B \subseteq \mathbb{N}$ abbiamo che

$$d_\infty(\chi^A, \chi^B) = \sup_{\mathbb{N}} |\chi^A - \chi^B| = 1.$$

Per ogni $\chi \in X$ consideriamo la palla $B_\chi = B(\chi, \frac{1}{2})$. Sia ora $C \subseteq l^\infty(\mathbb{R})$ un sottoinsieme numerabile. Se mostriamo che C non può essere denso abbiamo concluso. Osserviamo che C può intersecare al massimo solo una quantità numerabile delle palle B_χ. Ma allora consideriamo l'insieme

$$U = \left\{ \bigcup B_\chi \text{ tali che non intersecano } C \right\}$$

Ma allora U è un insieme aperto non vuoto tale che $U \cap C = \emptyset$ da cui la tesi. □

Esercizio 9. [1, Esercizio 4.1] Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza euclidea.

Svolgimento. Usiamo il Teorema di punto fisso di Banach (vedi [2, Teorema 4.1.2]) se f fosse una contrazione allora f avrebbe solo un punto fisso. Studiamo quindi i punti fissi di f: sia $x \in \mathbb{R}$. Imponiamo $f(x) = x$ e quindi

$$\sqrt{1 + \alpha x^2} = x$$

elevando al quadrato otteniamo

$$1 + \alpha x^2 = x^2$$

ovvero

$$x^2(1 - \alpha) - 1 = 0$$

e quindi

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{1 - \alpha}}$$

Osserviamo che per $\alpha \geq 1$ questa equazione non ha soluzione quindi f non è una contrazione per $\alpha \geq 1$. Se invece $\alpha < 1$ c'è l'unica soluzione $x = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$ (notare che dobbiamo scartare la soluzione negativa che era stata "aggiunta" dall'elevamento al quadrato). Quindi f potrebbe essere una contrazione per $\alpha < 1$. Vediamo che in effetti lo è. Abbiamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ per il teorema di Lagrange esiste $z \in [x, y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

Abbiamo che

$$f'(z) = \frac{\alpha z}{\sqrt{1 + \alpha z^2}}$$

e quindi

$$|f'(z)| = \frac{\alpha |z|}{\sqrt{1 + \alpha z^2}} \leq \frac{\alpha |z|}{\sqrt{\alpha}|z|} = \sqrt{\alpha}$$

e in conclusione da $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ ricaviamo che

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(z)||x - y| \leq \sqrt{\alpha}|x - y|$$

Ma se $\alpha < 1$ allora segue che f è una contrazione. □

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf