Domande di Teoria per l'esame FALG

Ing. dell'Energia (Canale A e B) - Ing. Meccanica (Numerosità 3)

a.a. 2023/2024

Docenti: Bertolin, Fiorot, Martini

Di seguito trovate l'elenco completo delle dimostrazione da sapere. Per completezza ci sono tutti gli enunciati, ma la domanda d'esame sarà solo il testo in grassetto.

DOMANDE di Teoria

1. **Dimostrare che dati U, W sottospazi di uno stesso k-spazio vettoriale V allora l'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio di V.**
2. **Enunciare e dimostrare la Formula di Grassmann.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: sia V un k-spazio vettoriale finitamente generato e $U, W \leq V$. Allora* $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.
3. **Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio.**
4. **Dimostrare che l'immagine di un'applicazione lineare è un sottospazio.**
5. **Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se* $\ker f = \{0_V\}$.
6. **Enunciare e dimostrare teorema delle dimensioni.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: data un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tra k-spazi vettoriali e* $\dim V = n$, *allora* $n = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$.
7. **Enunciare e dimostrare il Teorema di Rouché-Capelli.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, esso ha soluzione se e solo se il rango della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa $(A|b)$. Se i ranghi coincidono lo spazio delle soluzioni è dato da $v + \ker A$ con v una soluzione del sistema e $\ker A$ soluzione del sistema lineare omogeneo associato;* $\dim \ker A = n - \mathrm{rg} A$.
8. **Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso determinante, e dimostrare che non vale viceversa fornendo un controesempio.**
9. **Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e dimostrare che non vale viceversa fornendo un controesempio.**
10. **Dato f un endomorfismo di un k-spazio vettoriale V. Dimostrare che autospazi di f relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta.**
11. **Sia V un k-spazio vettoriale di dimensione finita. Sia f un endomorfismo di V e sia α un autovalore di f. Dimostrare che $\mathbf{1} \leq \mathbf{m_g}(\alpha) \leq \mathbf{m_a}(\alpha) \leq \mathbf{dimV}$.**
12. **Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzabilità di un endomorfismo.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: dato $f : V \to V$ un endomorfismo di un k-spazio vettoriale V di dimensione finita, esso è diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico ha tutte le radici nel campo k e per ogni autovalore di f la sua molteplicitàlgebrica coincide con la molteplicità geometrica.*

13. **Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: dati* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $|v \cdot w| \leq \|v\|\|w\|$. *Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti.*

14. **Enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: per ogni* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

15. **Dimostrare che l'ortogonale di un sottospazio è un sottospazio.**

16. **Dimostrare che dato T un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $T \oplus T^{\perp} = \mathbb{R}^n$, dove $T^{\perp}$ è l'ortogonale di T .**

17. **Dimostrare che se A è una matrice quadrata ortogonalmente diagonalizzabile, allora A è simmetrica.**

18. **Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali.**

19. **Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica e α, β sono autovalori distinti di A, allora gli autospazi V_α e V_β sono ortogonali tra loro.**

20. **Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono autovalori distinti di A, allora $V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_n} = \mathbb{R}^n$**

21. **Enunciare e dimostrare il teorema spettrale.** *Ricordo che l'enunciato è il seguente: una matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *è simmetrica se e solo se è ortogonalmente diagonalizzabile.*