Corso di Calcolo Numerico

Prof. Stefano De Marchi

Università degli studi di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
http://www.math.unipd.it/~demarchi

Esercizi Cap2

NB: Per alcuni degli esercizi che seguono potete avvalervi anche di Matlab per fare i calcoli e/o i grafici. Cercate comunque di risolverli con carta e penna.

Sommario

Esercizi Cap 2

Esercizio 6

Si consideri la funzione $f(x) = 1.74\ \ln(10\sqrt{x}) - \dfrac{4}{10} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

- Trovare l'intervallo $[a, b]$ che contiene l'unica radice α di $f(x)$.
- Costruire un metodo di punto fisso convergente in $[a, b]$ alla radice α. Usare $tol = 1.e-6$.

Soluzione Esercizio 6

- Dobbiamo fare un minimo di studio di funzione. Dominio di f è $x > 0$. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre $f'(x) = 1.74\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{1.74\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x^3}}$ che è sempre positiva. Quindi la funzione è sempre strettamente crescente, come ci aspettavamo. Per individuare l'intervallo che contiene lo zero, possiamo procedere come segue: solo il $\ln(10\sqrt{x})$ assume valori negativi e positivi mentre $-1/\sqrt{x} < 0$ nel dominio. Inoltre $\ln(10\sqrt{x}) = 0$ per $x = 1/100$ e $f(1/100) \approx -10.4$. Ancora $f(1/10) \approx -1.56$ mentre $f(3/10) \approx 0.73$. Quindi l' intervallo richiesto è $I_\alpha = [1/10, 3/10]$.
- Anzitutto raccogliendo $1\sqrt{x}$ la funzione diventa $\sqrt{x}(1.74\ln(10\sqrt{x}) - 4) = 1$ da cui moltiplando a sx e dx per $\sqrt{x}$ otteniamo

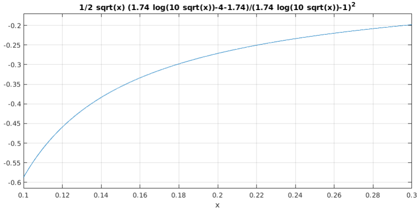
$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1.74\ln(10\sqrt{x}) - 0.4)} \tag{1}$$

Continua soluzione esercizio 6

A questo punto dobbiamo vedere se $|g'| < 1$ in I_α. Ma

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1.74\ln(10\sqrt{x}) - 0.4 - 1.74)}{(1.74\ln(10\sqrt{x}) - 1)^2}$$

Qui ci possiamo aiutare con Matlab per il plot di g' in I_α il cui grafico è



Usando la funzione di punto fisso (1) con la funzione Matlab `MPuntoFisso.m` con la $tol = 1.e-6$ e partendo da $x_0 = 0.3$ la soluzione $\alpha = 0.2030$ in $n = 6$ iterazioni.

Esercizi Cap 2

Esercizio 7

Si considerino le funzioni $f_1(x) = \ln(2|x|)$ e $f_2(x) = 1 - k\,x$, k reale.

1. Aiutandosi con Matlab facendone il plot, dire quante soluzioni reali hanno le due funzioni per i seguenti valori $k_1 = \mathrm{e}^{-2} - 0.1$, $k_2 = k_1 + 0.3$ e $k_3 = 0$.
2. Si consideri quindi $k = 1$. Studiare la convergenza dei seguenti metodi di punto fisso all'unica radice α di $\ln(2|x|) = 1 - x$

(i)

$$x_{i+1} = 1 - \ln(2|x_i|) \ ,$$

(ii)

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \exp\left(1 - x_i\right) \ .$$

Soluzione Esercizio 7

Proponiamo una soluzione senza l' uso di Matlab

1. La funzione f_1 è pari, simmetrica rispetto a $x = 0$ che è asintoto verticale, ovvero $\lim_{x \to 0} f_1(x) = -\infty$.

   Il problema è risolvere $f_1(x) = f_2(x)$, dove $f_2(x) = 1 - kx$ è una retta con coefficiente angolare negativo quando $k > 0$, mentre è la retta $f_2(x) = 1$ quando $k = 0$. Pertanto

   - $k_3 = 0$, si hanno due soluzioni reali
   - $k_1 = 1/e^2 - 1/10$ essendo $k_1 \approx 0.035$ la retta non è molto diversa dal caso precedente e si hanno ancora due soluzioni reali;
   - $k_2 = k_1 + 0.3$ ora $k_2 \approx 0.335$, in questo caso si ha una sola soluzione positiva. Si prova facendo vedere che $1 - k_2 x > \log(2|x|), \forall x < \alpha$. La disequazione è equivalente a far vedere che $e^{1-k_3 x} > 2x$ per $0 < x < \alpha$ e che $e^{1-k_2 x} > -2x$ per $x < 0$. Basta prendere alcuni valori per verificarlo

Continua soluzione esercizio 7

2. Anzitutto, per $k = 1$ siamo come nel caso di k_3, c'è un'unico zero che è $1/2 < \alpha < 1$. Infatti $\ln(1) = 0 < 1 - 1/2 = 0.5$ mentre $\ln(2) > 1 - 1 = 0$. Possiamo prendere $I_\alpha = [1/2, 1]$. Dobbiamo verificare se le derivate delle funzioni d'iterazione (i) e (ii) sono in modulo minori di 1 in I_α.
   (i) $g'(x) = -\frac{sign(x)}{|x|} = -\frac{1}{x}, \quad x \in I_\alpha$ che è minore di 1 solo per $x > 1$. Quindi non va bene come funzione d'iterazione.
   (ii) $g'(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x}$, chiedere che sia minore di 1 in modulo se e solo se $x > 1 - \ln(2) \approx 0.31$, che è sempre vera in $I_\alpha = [1/2, 1]$.

   In conclusione, il metodo di punto fisso (ii) è convergente alla radice $\alpha > 0$. Ecco alcune iterazioni
   $x_0 = 0.5; x_1 \approx 0.82, x_2 \approx 0.6, x_3 \approx 0.75, x_4 \approx 0.64$. La soluzione è $\alpha \approx 0.685$.

Esercizi Cap 2

Esercizio 9

Dato il polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Si dica quale tra le seguenti 3 funzioni di punto fisso per calcolare la radice $\xi = 1$, converge con ordine almeno quadratico: $g_1(x) = 2x + p'(x)$, $g_2(x) = p(x) - (1 - 2x)$ e $g_3(x) = p(x) + x$. Le rimanenti funzioni sono convergenti a ξ? Si spieghi.

Soluzioni all' esercizio 9

Anzitutto verifichiamo che le tre funzioni d'iterazione sono di punto fisso e se convergono con ordine quadratico

- $g_1(x) = 2x + 3x^2 - 4x = 3x^2 - 2x$ e $g_1(1) = 1$. Pertanto è di punto fisso. Inoltre $g_1'(x) = 6x - 2$ che valutata in ξ da valore 4, diverso da zero. Quindi non converge con ordine quadratico.
- $g_2(1) = p(1) - (1 - 2)$ ma $p_1(1) = 0$ quindi $g_2(1) = 1$, Pertanto è di punto fisso. Ora $g_2'(x) = p'(x) + 2 = 3x^2 - 4x + 2$ che se valutiamo in ξ da valore 1, quindi non converge con ordine quadratico.
- $g_3(1) = p(1) + 1 = 1$ essendo $p(1) = 0$. Pertanto è di punto fisso. Inoltre $g_3'(x) = p'(x) + 1 = 3x^2 - 4x + 1$ ed da' valore 0 in ξ. Quindi converge con ordine quadratico. È proprio quadratico perchè $g_3''(x) = 6x - 4$ che in ξ da valore 2.

Continua soluzione esercizio 9

Per verificare la convergenza di g_1 e g_2 basta che osserviamo che $g_1'(\xi) = 4 > 1$ e che $g_2'(\xi) = 1$.
Per la convergenza sappiamo che la derivata prima della funzione di punto fisso deve essere minore di 1 in modulo in tutto un intorno della radice. Non essendo soddisfatta la condizione in $\xi = 1$ nè per g_1 nè per g_2, concludiamo che g_1, g_2 non convergono.