Lezione 6 (25 ottobre 2023)

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \alpha \text{ radice}$$

Usando questa ϕ con il metodo di Newton si mantiene l'ordine quadratico.

In particolare se la applico a $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x$$

$$\phi(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \qquad \phi'(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\phi(x_k)}{\phi'(x_k)} = x_k - \frac{\frac{x_k}{2}}{1/2} = 0$$

che è equivalente ad usare

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

NB: ϕ' richiede il calcolo di f''

Newton è un metodo di punto fisso con funzione d'iterazione

$$g(x) = x - f(x)/f'(x)$$

Allora posso usare, dal punto di vista implementativo, lo stesso codice del punto fisso modificando la funzione d'iterazione

Metodo di BRENT che ha maggiore stabilità

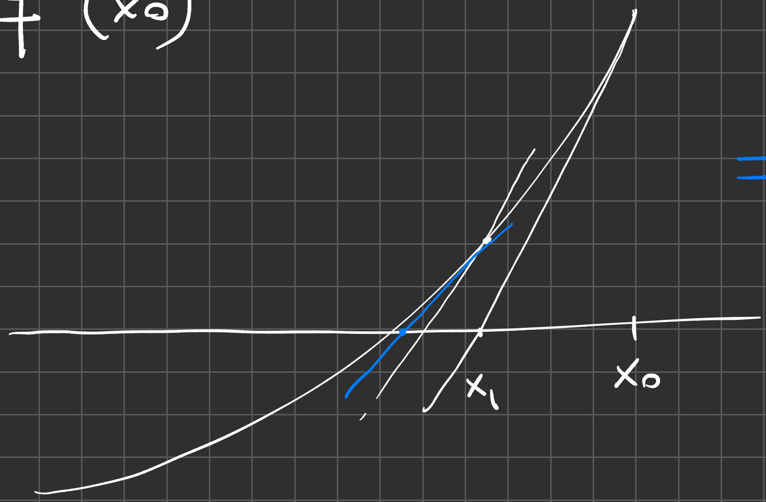
Osservazione

$$\underbrace{x_{k+1} - x_k}_{\text{scarto}} = \underbrace{-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{\text{stima dell'errore}}$$

Metodo della tangente fissa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{c} \qquad c \neq 0$$

Es: $c = f'(x_0)$



$\Rightarrow$ IL METODO HA CONVERG. LINEARE

Inoltre perché converga dovrei verificare che

$$\left| g'(x) \right| = \left| 1 - \frac{f'(x)}{c} \right| < 1 \qquad \forall x \in I_\alpha$$

Studiando questa derivata posso determinare il valore di c "ottimale" che mi consente di avere convergenza più rapida.

Si scopre che il c che dà convergenza più rapida è $c = f'(x)$ cioè il <u>METODO DI NEWTON</u>

ALTERNATIVA PIÙ EFFICACE è il METODO DELLE SECANTI

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \qquad k \geq 1$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Osservazioni

1. È un metodo di punto fisso

2. Al passo $(k+1)$-esimo per determinare x_{k+1} devo valutare f in x_k mentre $f(x_{k-1})$ ce l'ho dal passo precedente

3. Non devo calcolare derivate, quindi dal punto di vista dell'efficienza computazionale il metodo è più efficiente del metodo di Newton

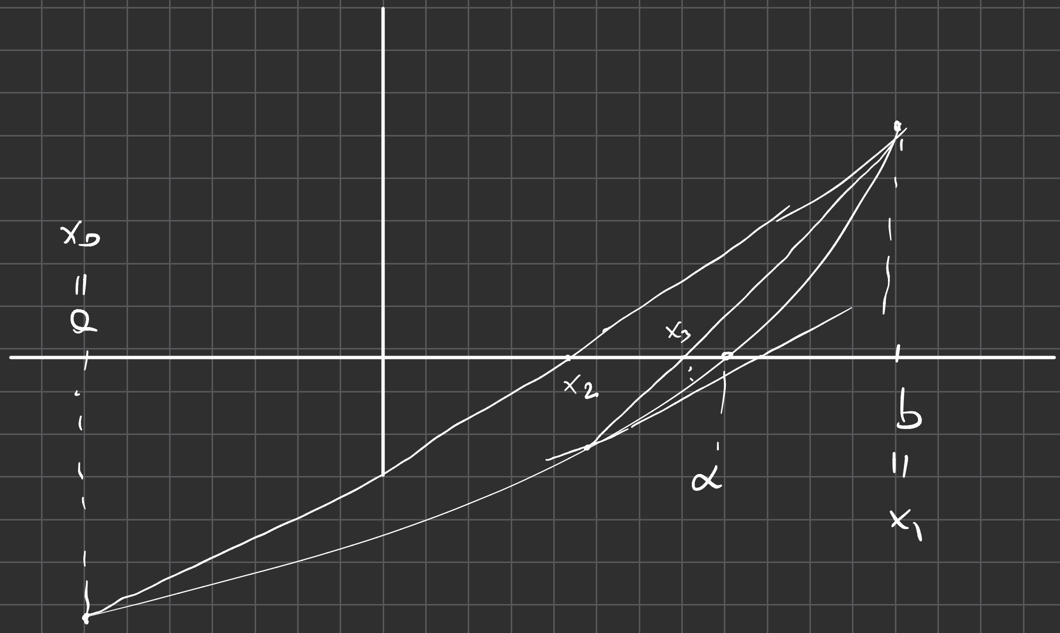
4. Naturalmente richiede 2 valori iniziali per innescare l'iterazione

5. Circa l'ordine di convergenza del metodo delle secanti si può dimostrare che

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618\ldots$$

$\Longrightarrow$ convergenza superlineare

Il metodo si estende facilmente a dimensioni maggiori di 1.



Esercizio 1

Data $f(x) = \log(1+x^2)$

(a) mostrare che f ha un unico zero reale, α

(b) determinare un metodo di punto fisso convergente ad α con ordine almeno quadratico

(c) Partendo da $x_0 = \frac{1}{2}$, facendo 3 iterazioni calcolare l'errore assoluto $|x_3 - \alpha|$

Svolgimento

(a) f è pari, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

$\alpha = 0$ è la radice cercata

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \qquad f'(0)=0$$

$\hookrightarrow$ α è doppia

(b) scelgo Newton

$$g(x) = x - 2\,\frac{\log(1+x^2)\,(1+x^2)}{2x}$$

Provare che $g'(0)=0$, $g''(0)\neq 0$

$\Longrightarrow$ il metodo è esattamente di ordine 2

(c) $x_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad \alpha = 0$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \log(1+1/4)\,(1+1/4) \simeq -0.0579$$

$x_2 \cong 9.67e-5$; $\qquad x_3 \cong 2.03e-13$

L'errore $e_3 = |x_3 - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\alpha}| = x_3$

#

Esercizio 2

Data la funzione di punto fisso

$$g(x) = x + c\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}\right) \quad \text{che}$$

ha punto fisso $\alpha = 1$

L'iterazione $x_{k+1} = g(x_k)$ è convergente se ...

Controlliamo che

$$1 \overset{?}{=} g(1)$$

$$g(1) = 1 + c\left(\cancel{\frac{1-3+2}{2}}\right) = 1 \quad \checkmark$$

Osservo che $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

$$g'(x) = 1 + c\left(\frac{(2x-3)(1+x^2) - 2x\,(x-1)(x-2)}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$g'(1) = 1 + c\left(\frac{(-1)(2)}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{c}{2}$$

$$\left|1 - \frac{c}{2}\right| < 1,$$

$$-1 < 1 - \frac{c}{2} < 1$$

$$-2 < -\frac{c}{2} < 0 \qquad -4 < -c < 0$$

$$4 > c > 0$$

Per casa

$$f(x) = x + c\,(x^2+x-2) \qquad c \neq 0$$

(a) quali i punti fissi

(b) per quali valori di c è convergente ad $\alpha = 1$?

Esercizio 3

Trovare un metodo di punto fisso convergente alla radice positiva di $x^{10} = 10$

Svolgimento

$$f(x) = x^{10} - 10$$

f è pari, in $x=0$ ha un minimo che vale -10 ed ha 2 radici

$$-1.26 \simeq x_1 = -\sqrt[10]{10}, \quad x_2 = +\sqrt[10]{10} \simeq 1.26$$

Consideriamo la radice positiva

Prendo come intervallo separatore

$$I_{x_2} = [1.2, 1.3]$$

$$\left(\text{Infatti} \quad f(1.2) \simeq -3.8 \qquad f(1.3) \simeq 3.8 \right)$$

Uso il trucco

$$x = \underbrace{f(x) + x}_{g(x)}$$

Questa $g(x)$ sarà convergente se

$$|g'(x)| < 1 \qquad \forall \ x \in \underbrace{[1.2, 1.3]}_{I_{x_2}}$$

$$g'(x) = 10x^9 + 1$$

Se $\quad |10x^9+1|<1 \quad \forall x \in I_{x_2}$

$$-2 < 10x^9 < 0$$

$$-\frac{2}{10} < x^9 < 0$$

$$-\frac{1}{5} < x^9 < 0$$

che non è mai verificata

$$\Longrightarrow \quad g(x) = f(x) + x$$

NON È CONVERGENTE

Idea 

$$x^7 = \frac{10}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad x = \underbrace{\sqrt[7]{10}\,\sqrt[7]{x^{-3}}}_{g(x)}$$

che per costruzione ha punto fisso x_2

$$g'(x) = \sqrt[7]{10}\left(-\frac{3}{7}\right)x^{-10/7}$$

che è in modulo $< 1 \quad \forall x \in I_{x_2}$ (verificate!)

Verificare che le seguenti funzioni

$$g_k(x) = \sqrt[10-k]{\frac{10}{x^k}} \qquad 1 \le k \le 4$$

sono funzioni di punto fisso convergenti!

<u>Usando Newton</u> posso costruire un'altra funzione d'iterazione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \underbrace{\frac{x^{10} - 10}{10\, x^9}}$$

$$= \frac{9}{10} x + \frac{1}{x^9}$$

Pertanto le soluzioni di $x^n = n$ con Newton hanno funzione d'iteraz.

$$\boxed{g(x) = \frac{n-1}{n} x + \frac{1}{x^{n-1}}}$$

In particolare $x^2 = 2$, in partic. $x = \sqrt{2}$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{x}}$$

<u>Esempio</u>: $x_0 = 1$

$$x_1 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5 = \frac{3}{2}$$

$x_2 = \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$ e in poche iterazioni si calcola un'approssimazione di $\sqrt{2}$

Esercizio 4

Dato $\quad p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Tra le seguenti funzioni di punto fisso per calcolare la radice $\alpha = 1$ converge con ordine almeno quadratico

$g_1(x) = 2x + p'(x)$

$g_2(x) = p(x) - (1 - 2x)$

$g_3(x) = p(x) + x$

Intanto $\quad g_1(x) = 2x + 3x^2 - 4x$

$$\boxed{g_1(x) = 3x^2 - 2x}$$

$g_1(1) = 3 - 2 = 1 \qquad g_1$ ha punto fisso in $x = 1 = \alpha$

$g_2(x) = x^3 - 2x^2 \cancel{+1} \cancel{-1} + 2x$

$$\boxed{g_2(x) = x^3 - 2x^2 + 2x}$$

$g_2(1) = 1 - 2 + 2 = 1$ ✓

$$\boxed{g_3(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1}$$

$g_3(1) = 1 - \cancel{2} + \cancel{1} + \cancel{1}$ ✓

Per verificare che convergono almeno quadrat.

devo provare che

$$|g_k'(1)| < 1 \qquad k = 1, 2, 3$$

$\Longrightarrow$ convergono

per avere ordine quadratico devo avere

$$g_k'(1) \stackrel{?}{=} 0$$

Verifico la parte relativa alla conv. quadratica

$$g_1'(x) = 6x - 2 \Big|_{x=1} = 4$$

$$g_2'(x) = 3x^2 - 4x + 2 \Big|_{x=1} = 1$$

$$g_3'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Big|_{x=1} = 0 \quad \leftarrow$$