

# Laboratorio di Calcolo Numerico: Ricerca di zeri di funzioni

Giacomo Elefante

Laboratorio di calcolo numerico  
26/10/23

# Scopo di oggi

Analizzare algoritmi per la ricerca di zeri di funzioni in Matlab:

- Bisezione
- Punto fisso
- Newton

# Metodo di bisezione

Il metodo di bisezione genera una successione di intervalli  $[a_k, b_k]$  con

- $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$
- $[a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$
- $|b_k - a_k| = \frac{1}{2} |b_{k-1} - a_{k-1}|$ .

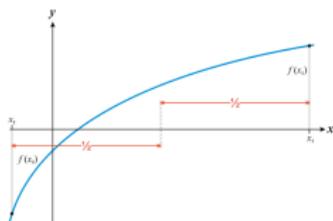


Figure: Bisezione di un intervallo.

Dato  $a_{k-1} < b_{k-1}$  e  $x_{k-1} = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ , allora il nuovo intervallo  $[a_k, b_k]$  è definito come

$$a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1} \text{ se } f(a_{k-1}) \cdot f(x_{k-1}) < 0,$$

$$a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1} \text{ se } f(x_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0.$$

Utilizzeremo quindi il residuo non pesato come criterio di arresto

$$|f(x_{k-1})| \leq \text{tol}.$$

Per la convergenza ad una radice è necessario individuare un intervallo  $[a, b]$  della funzione  $f$  tale che

- $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,
- $f$  sia strettamente monotona in  $[a, b]$ .

```

function [x,xall,iter] = bisezione(f,a,b,tol,max_iter)
% ----- Inputs -----
% f : funzione (inline) di cui vogliamo lo zero
% a,b : estremi dell'intervallo
% tol : tolleranza
% max_it: numero massimo di iterazioni
% ----- Outputs -----
% x : la soluzione
% xall: tutti i punti medi dell'iterazione
% iter: numero d'iterazioni fatte
% -----
if f(a)*f(b) > 0
    error('Metodo di bisezione non applicabile');
elseif f(a)*f(b) == 0
    error('La funzione e' zero su uno dei bordi');
end

iter = 1;          % iter = n + 1 (nella lezione di teoria)
x = (a+b)/2;      % punto medio di [a,b]
xall(iter) = x;   % salva il primo punto medio

while (abs(f(x)) > tol) && (iter < max_iter) % continua se condizioni soddisfatte

    if f(x) == 0
        return; % stop se x e' uno zero
    elseif f(x)*f(a) < 0
        b = x; % aggiorna bordo destro b
    elseif f(b)*f(x) < 0
        a = x; % aggiorna bordo sinistro a
    end

    iter = iter + 1;
    x = (a+b)/2; % aggiorna punto medio
    xall(iter) = x; % salva il nuovo punto medio

end

```

Figure: Codice del metodo di bisezione.

## Esercizio

Per la funzione  $f(x) = \exp(x) - 2 + x$  si trovi un punto  $x \in [0, 1]$  tale che  $|f(x)| < 10^{-8}$ .

- Si crei il grafico della funzione  $f$ .
- Si mostri che  $f(0)f(1) < 0$  stampando il segno a schermo.
- Si usi il metodo di bisezione per la funzione  $f$  e si indichi con `x_all` il vettore comprendente tutte le iterate.
- Dato  $x^* = 0.4428544010023885$ , si disegni il grafico in scala semilogaritmica dell'errore relativo  $|x^* - x_{all}|/|x^*|$ .

## Metodo di punto fisso

L'idea del metodo di punto fisso applicato alla ricerca di zeri di funzione è di riformulare l'equazione  $f(x^*) = 0$  in un problema equivalente di punto fisso ovvero

$$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = g(x^*)$$

e di calcolare il punto fisso tramite la iterazione

$$x_k = g(x_{k-1}), \quad k \geq 1 \text{ dato } x_0 \text{ un punto iniziale.}$$

Esempio di riformulazione:

$$\cos(x) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos(x)$$

# Convergenza del metodo di punto fisso

La convergenza è garantita nel caso valga il seguente teorema.

## Teorema

Se esiste un intervallo  $[a, b]$ , tale che

- $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$
- $g \in C^1([a, b])$  ( $g$  è continuamente differenziabile)
- $|g'(x)| \leq \gamma < 1, \forall x \in [a, b]$

allora  $g$  ha un unico punto fisso  $x^*$  in  $[a, b]$  e se  $x_0 \in [a, b]$ , allora l'iterazione di punto fisso converge ad  $x^*$  (almeno) linearmente. Inoltre abbiamo la seguente stima (a priori) dell'errore

$$|x_k - x^*| \leq \gamma^k |x_0 - x^*|.$$

Altrimenti è possibile usare il risultato locale.

## Teorema

Sia  $g \in C^1([a, b])$  una funzione con un punto fisso  $x^*$  e

$$|g'(x^*)| = \gamma < 1,$$

allora esiste un intorno del punto fisso  $I_\delta(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [a, b]$  tale che  $x^*$  è l'unico punto fisso di  $g$  in  $I_\delta$  e l'iterazione di punto fisso converge per ogni punto iniziale  $x_0 \in I_\delta$ . Inoltre,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = |g'(x^*)| = \gamma.$$

In genere il metodo di punto fisso ha convergenza lineare, tuttavia se le sue derivate

$$g^{(1)}(x^*) = g^{(2)}(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0, g^{(p)}(x^*) \neq 0$$

allora l'ordine di convergenza è (almeno)  $p$

### Definizione

Sia  $\{x_k\}$  una successione convergente a  $x^*$ . Se esiste  $p \geq 1$  e una costante  $\gamma > 0$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \gamma,$$

allora si dice che la successione  $\{x_k\}$  ha ordine di convergenza  $p$ .

```

function [x,xall,iter] = puntofisso(g,x0,tol,max_iter)

% Iterazione di punto fisso per la soluzione di equazioni nonlineari
% Input:
%       g       funzione di cui vogliamo trovare il punto fisso
%       x0      valore iniziale
%       tol     tolleranza per la condizione di arresto
%       max_iter numero massimo di iterazioni
% Output:
%       x       soluzione finale
%       xall    vettore con tutte le iterazioni
%       iter    numero di iterazioni

iter = 1;      % iter corrisponde all n della lezione
x = g(x0);    % Prima iterazione
xall(iter) = x;

while (abs(x-x0) > tol) && (iter < max_iter) % ciclo iterativo con condizioni di arresto
    x0 = x;
    x = g(x0); % nuova valutazione di g
    iter = iter + 1; % nuovo numero di iterazione
    xall(iter) = x; % salva x in xall
end
end

```

Figure: Codice del metodo di punto fisso.

## Esercizio

Sia  $f(x) = \sin(x) + x - 1$ , si trovi quindi la radice  $x^*$  di  $f$  con il metodo di punto fisso.

- Si crei il grafico della funzione  $f$  e dal grafico si trovi un intervallo  $[a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{Z}$  di lunghezza 1 e contenente lo zero della funzione.
- Si trovi una funzione  $g$  tale che il metodo di punto fisso converga per ogni  $x_0 \in [a, b]$  alla radice  $x^*$ .
- Si crei il grafico della funzione  $g$  sovrapposto alla funzione  $h(x) = x$  nell'intervallo  $[a, b]$  e si scelga un punto  $x_0$  adeguato.
- Si usi il metodo di punto fisso per trovare una approssimazione (usando come tolleranza  $\text{tol} = 10^{-8}$ ), della radice  $x^* = 0.510973429388569$ .
- Si faccia il grafico in scala semilogaritmica dell'errore relativo tra tutte le iterate e il valore esatto.

# Metodo di Newton

Il metodo di Newton è un metodo di punto fisso con funzione di iterazione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

per la ricerca dello zero  $x^*$  di una funzione  $f$ .

Ovvero, l'iterazione è

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

La funzione  $g$  ha derivata

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

e essa si annulla nello zero  $x^*$ , infatti la convergenza di questo metodo è quadratica, ovvero ha ordine di convergenza  $p = 2$  (se  $f'(x^*) \neq 0$ , ovvero se  $x^*$  è uno zero semplice di  $f$ ).

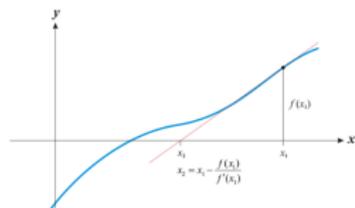


Figure: Interpretazione geometrica dell'iterazione di Newton.

```

function [x,xall,iter] = newton(f,Df,x0,tol,max_iter)

% Iterazione di Newton per la soluzione di equazioni nonlineari
%
% Input:
%       f       funzione di cui vogliamo trovare lo zero
%       Df      derivata di f
%       x0      valore iniziale
%       tol     tolleranza per la condizione di arresto
%       max_iter numero massimo di iterazioni
% Output:
%       x       soluzione finale
%       xall    vettore con tutte le iterazioni
%       iter    numero di iterazioni

if Df(x0) == 0
    error('Warning: Df(x0) = 0');
end

% Prima iterazione del metodo di Newton
dx = -f(x0)/Df(x0); % primo incremento
x = x0+dx;          % prima iterata
iter = 1;
xall(iter) = x;

while (abs(dx) > tol) && (iter < max_iter) % ciclo iterativo
    x0 = x;
    if Df(x0) == 0
        break
    end
    dx = -f(x0)/Df(x0); % nuovo incremento
    x = x0 + dx;        % nuova iterazione
    iter = iter + 1;    % nuovo numero di iterazione
    xall(iter) = x;
end
end

```

Figure: Codice del metodo di Newton.

# Esercizio

## Esercizio

Sia  $f(x) = \exp(x) - 2 + x$ , si trovi la radice  $x^*$  di  $f$  con il metodo di Newton.

- Si crei il grafico della funzione  $f$  nell'intervallo  $[-2.2]$ .
- Si trovi la radice approssimata di  $f$  partendo dal valore iniziale 0 con tolleranza  $\text{tol} = 10^{-6}$ .
- Si calcoli l'errore relativo con lo zero  $x^* = 0.442854401002389$ .
- Si faccia il grafico in scala semilogaritmica dell'errore relativo tra tutte le iterate e il valore esatto.

## Esercizio (per casa)

### Esercizio

Si modifichi la funzione `bisezione`, creando una funzione denominata `bisezione2` dove, come criterio di arresto, al posto del residuo non pesato si utilizza il residuo pesato, ovvero dato il peso

$$w = \left( \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})} \right),$$

allora le iterazioni si concluderanno se

$$|w \cdot f(x_{k-1})| \leq \text{tol}$$

e si applichi la funzione `bisezione2` alla funzione dell'esercizio precedente, andando a sovrapporre il grafico dell'errore a quello di `bisezione` con il criterio di arresto sul residuo non pesato.

# Esercizio (per casa)

## Esercizio

Nel caso  $x^*$  sia uno zero multiplo, con molteplicità  $m > 1$ , il metodo di Newton converge linearmente. Per questo la formula di Newton può essere modificata per garantirci la convergenza almeno quadratica. In particolare, l'iterata modificata diventa

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- Si modifichi la funzione `newton` per creare la funzione `newton_mod` contenente un input aggiuntivo corrispondente alla molteplicità dello zero della funzione  $f$  e che utilizzi l'iterata modificata.
- Applicare in seguito sia Newton che Newton modificato alla funzione  $f(x) = \log(x + 2)^2$  per trovare lo zero partendo da  $x_0 = 0$  e con  $\text{tol} = 10^{-8}$  e fare il grafico in scala semilogaritmica degli errori assoluti tra le iterate e lo zero della funzione  $f$ , sovrapponendo gli errori di Newton e quelli di Newton modificato.

# Esercizio (per casa)

## Esercizio

Si modifichi la funzione `newton` per creare una nuova function `secante`, sostituendo la derivata  $f'(x_k)$  nella funzione di iterazione del metodo di Newton con il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

E si testi la function creata per trovare lo zero della funzione descritta nell'esercizio sul metodo di Newton, paragonando poi i due metodi

