Lezione 5 (18 ottobre 2023)

$$f(x) = 0 \implies x = g(x)$$

$$\Downarrow$$

x_0 scelto vicino alla radice α $\qquad x_{k+1} = g(x_k) \quad k \geq 0$

1) Se $|g'| < 1 \quad \forall x \in I_\alpha$ allora abbiamo speranza di avere un metodo convergente

2) Siccome non conosciamo α, ma conosciamo $\underbrace{x_k}_{xold}, \underbrace{x_{k+1}}_{xnew}$

allora possiamo "ciclare" finché

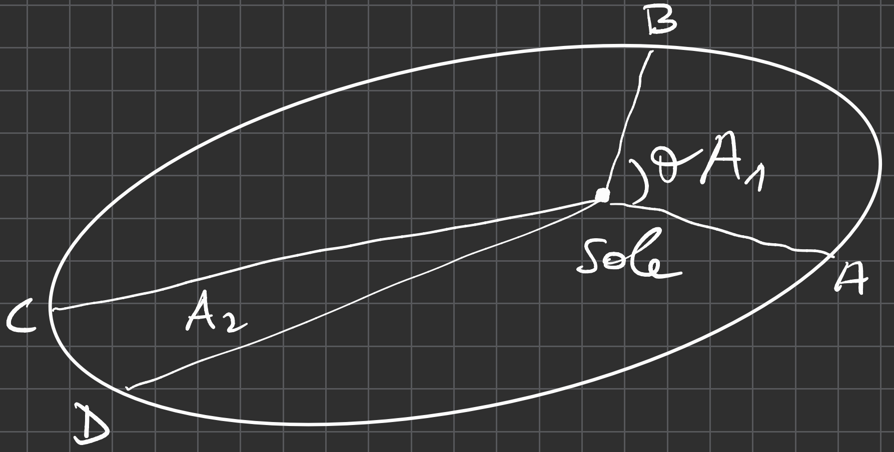
$$|x_{k+1} - x_k| > tol\,|x_{k+1}| \;\&\; k \leq kmax$$

le condizioni sono vere

se $|x_{k+1} - x_k| \leq tol\,|x_{k+1}|$ (ovvero l'errore relativo è minore od uguale alla tolleranza) $\implies x_{k+1}$ & x_k è l'approssimazione di α richiesta

se $k > kmax \implies$ non converge nel numero kmax settato function [out 1, ..., out n] = nome(in 1, ..., in k)

<u>Esempio</u> dalle leggi di keplero



C'è una relazione tra il tempo t e l'angolo al centro θ descritto dall'orbita del pianeta

$$\boxed{2\pi t = T(\theta - e\sin\theta)}$$

T = periodo di rivoluzione

e = eccentricità dell'orbita

$e \in (0,1)$

Trovare l'angolo θ per un certo fissato tempo t

$$2\pi t - T(\theta - e\sin\theta) = 0$$

$$\frac{2\pi t + eT\sin\theta}{T} = \cancel{T}\theta$$

$$g(\theta) = \frac{2\pi t + e T \sin\theta}{T}$$

se $T = 219$ (rivoluzione di Venere)

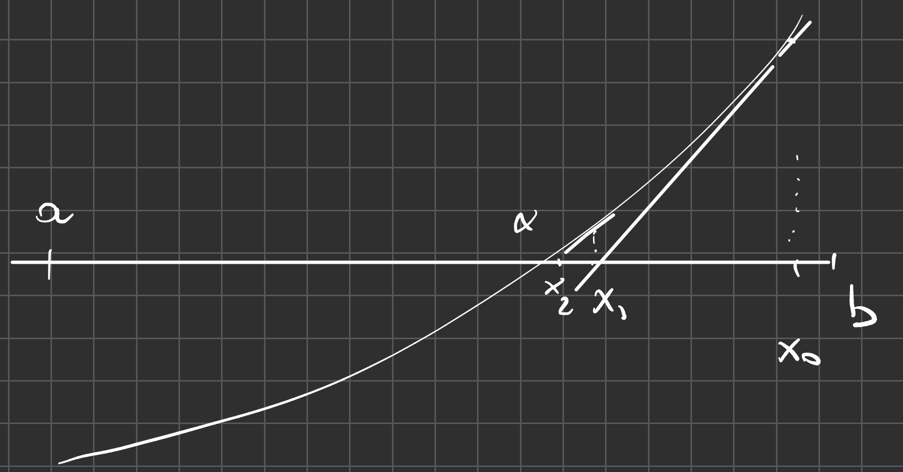
$e = 0.5$ con $t = 20$ si ottiene

$\theta \cong 0.9925$

<u>Per casa</u>: cercate un'altra funzione d'iterazione convergente

---

<u>METODO DI NEWTON</u>



Considero la retta tangente ad f in x_k

$$y(x) = f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k)$$

$y(x) = 0 \implies$

x_0, Metodo di Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \quad k \geq 0 \quad f'(x_k) \neq 0$$

Il metodo di Newton è un metodo di punto fisso con

$$g_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{con } f'(x) \neq 0 \ \forall x$$

Proposizione (convergenza locale)

Se x_0 è scelto sufficiente vicino alla radice α con $f'(\alpha) \neq 0$ (ovvero α è radice semplice) allora il metodo di Newton converge almeno quadraticamente e si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2 f'(\alpha)} \right|$$

Dim

$$0 = f(\alpha) = f(x_k) + f'(x_k)(\alpha - x_k) + f''(\xi) \frac{(\alpha - x_k)^2}{2} \qquad \xi \in (x_k, \alpha)$$

dividendo per $f'(x_k)$

$$0 = \underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} + \alpha - x_k + \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} \frac{(\alpha - x_k)^2}{2}$$

$$0 = \cancel{x_k} - x_{k+1} + \alpha - \cancel{x_k} + \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} \frac{(\alpha - x_k)^2}{2}$$

$$0 = \alpha - x_{k+1} + \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} \frac{(\alpha - x_k)^2}{2}$$

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{f''(\xi)}{2 f'(x_k)}$$

$\xi \to \alpha$

$x_k \to \alpha$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2 f'(\alpha)}$$

$\Longrightarrow$ per definizione di ordine di converg.
il metodo converge con ordine
almeno quadratico

$\#$

- Convergenza globale del metodo di Newton

se $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ $\quad [a,b]$ chiuso e limitato

- $f(a)f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$
- $f''(x) \geq 0 \ \vee \ f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$
- $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b-a$ e $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b-a$

allora, il metodo di Newton converge all'unica soluzione $\alpha \in (a,b)$ per ogni scelta di $x_0 \in [a,b]$

Problema con radici multiple

Esempio:

$\log(x^2+1) = 0 \quad x = 0$ è doppia

$(x-1)\log(x) = 0 \quad x = 1$ è doppia

$(x-2)^3 \quad x = 2$ è tripla

$f(x) = x^2$. Applico Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k}{2}$$

$$\Downarrow \quad x_{k+1} - 0 = \frac{1}{2}(x_k - 0)$$

$$e_{k+1} = \frac{e_k}{2} \implies \frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2}$$

$\implies$ ordine 1

<u>Soluzione</u>

$$x_{k+1} = x_k - \cancel{2} \frac{x_k^2}{\cancel{2} x_k}$$

$$= x_k - x_k = 0$$

$\implies$ ottengo la soluzione $\alpha = 0$

<u>Newton modificato</u> (o Newton per radici multiple)

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad f'(x_k) \neq 0, \quad k \geq 0$$

$$g_{N,m}(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$m =$ molteplicità

Proviamo che il metodo di Newton modificato ha ordine 2

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x) \quad \text{con } h^{(p)}(\alpha) \neq 0 \quad p = 0, \dots, m$$

$$g_N(x) = x - \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)}$$

raccolgo $(x-\alpha)^{m-1}$ a den.

$$g_N(x) = x - (x-\alpha) \underbrace{\frac{h(x)}{m\, h(x) + (x-\alpha) h'(x)}}_{\psi(x)}$$

Perché abbia ordine quadratico devo verificare che $g_N'(\alpha) = 0$

$$g_N'(x) = 1 - \frac{h(x)}{m\, h(x) + (x-\alpha) h'(x)} - (x-\alpha) \frac{d}{dx} \psi(x)$$

$$g_N'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0 \quad \text{se } m > 1$$

Mettendo m $\quad g_{N,m}'(\alpha) = 1 - \frac{m}{m} = 0$

Come stimare la molteplicità di una radice?

Se la successione $\{x_k\}$ converge linearmente

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

$$= g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}} = m$$

$$m_k = \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{2x_{k-1} - x_k - x_{k-2}} \qquad k \geq 2$$

- Alternative al metodo di Newton modificato che mantiene l'ordine quadratico

Invece che usare $f(x)$

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\phi(x_k)}{\phi'(x_k)}$$

ora $\phi(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0$

$$\phi'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$\phi'(\alpha) = 1 \quad \neq 0$

$\Longrightarrow$ che α è zero semplice di ϕ

se applico Newton a questa funzione ϕ ottengo un metodo con ordine 2 per calcolare α (anche se multiplo).

Applicandolo a $f(x) = x^2$, $\phi(x) = \frac{x}{2}$ $\phi'(x) = \frac{1}{2}$ $\phi(x) = x - \frac{x}{2} \cdot 2 = 0$ da subito è zero!

Esercizio per casa

$f(x) = e^x - 4x^2$ ha 3 radici $[-2, 5]$

- facendone uno studio di funzione "sommario" determinare 3 intervalli separatori delle 3 radici ξ_1, ξ_2, ξ_3
- trovare un metodo di punto fisso convergente a ξ_3

- con il metodo di Newton calcolare l'approssimazione x_3 di ξ_2 partendo da $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$$

$$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$$

Approssimare i risultati a 3 decimali