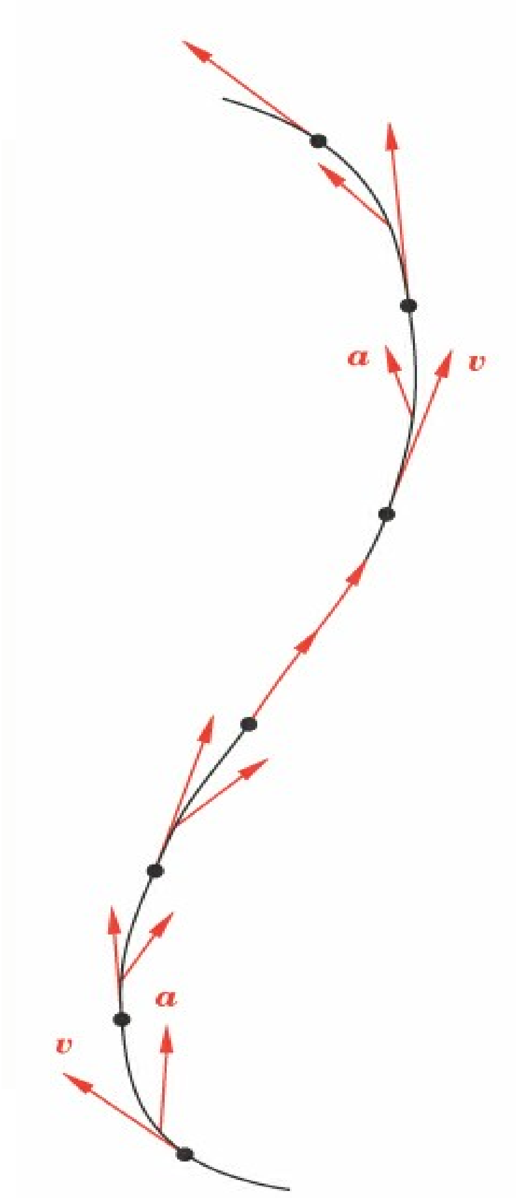
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Il moto circolare e il moto armonico

Il moto nel piano

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Coordinate cartesiane

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

Coordinate polari

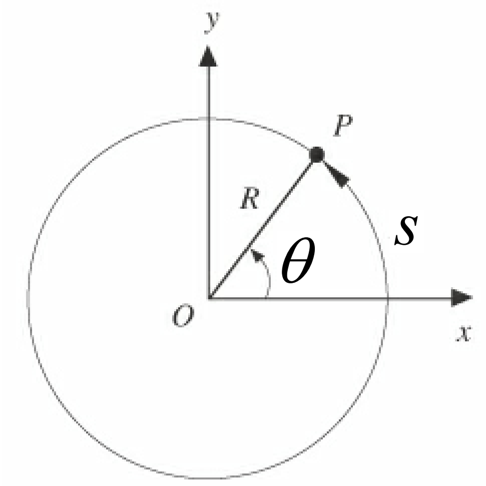
$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$
$$= a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}}$$

Se il moto è curvilineo, a_N è sempre diversa da zero ed è diretta verso il centro della traiettoria.

Il moto circolare - I

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



La traiettoria è una circonferenza (o un arco di circonferenza)

Il raggio vettore ha come modulo il raggio di curvatura

La posizione viene individuata da :

$$\theta(t), s(t) \quad s(t) = R\,\theta(t)$$

$$v_r = \frac{dR}{dt} = 0 \qquad v_\theta = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega = \frac{ds}{dt} \qquad v = |v_\theta|$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$ **velocità angolare** [ω] = radianti/secondi = rad/s

La velocità cambia continuamente direzione → il moto è accelerato (come ogni moto curvilineo)

Il moto circolare - II

Università degli Studi di Padova

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

accelerazione normale, detta centripeta che è sempre rivolta verso il centro

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\,\alpha$$

accelerazione tangente

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a_T}{R}$$

accelerazione angolare [α] = rad/s^2

Il moto circolare uniforme

Università degli Studi di Padova

$$v = \text{costante}, \omega = \text{costante}$$

$$a_T = 0, \alpha = 0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \text{costante}$$

Legge oraria

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

Moto periodico

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Le proiezioni del raggio vettore R sugli assi cartesiani:

$$x(t) = R\cos\theta(t) = R\cos(\theta_0 + \omega t)$$

$$y(t) = R\sin\theta(t) = R\sin(\theta_0 + \omega t)$$

Il moto circolare uniformemente accelerato

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

$$a_T = \text{costante}, \ \alpha = \text{costante}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$a_N(t) = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R \ \ \text{variabile}$$

Le equazioni hanno forma analoga a quelle del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\theta(t), \quad \omega(t) = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

e viceversa,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int \omega(t)\ dt$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int \alpha(t)\ dt$$

Un esempio di moto circolare

Università degli Studi di Padova

Per vedere un esempio di moto circolare utilizziamo questa simulazione numerica scaricabile al link:

https://phet.colorado.edu/it/simulation/legacy/rotation

Esercizio 1

Una piattaforma di una giostra si muove di moto circolare non uniforme. Parte da ferma e possiede una accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0.1\ rad/s^2$. Determinare:

a) dopo quanto tempo Δt la velocita' angolare e' pari a $0.5\ giri/s$;

b) il valore del modulo dell'accelerazione di un punto che si trova alla distanza di R=5m dal centro della giostra.

Consideriamo il moto circolare di un punto solidale con la giostra e posto ad una distanza R=5m dal centro.

a)

$\alpha(t) = \alpha = cost.$ $\qquad$ $\omega(t) = \omega(0) + \alpha(t-0) = \alpha t$

$\omega(\Delta t) = \alpha \Delta t$ $\qquad$ da cui: $\qquad$ $\Delta t = \omega(\Delta t)/\alpha = \frac{0.5\ giri/s}{0.1\ \ rad/s^2} = \frac{0.5\ 2\pi\ rad/s}{0.1\ \ rad/s^2} = 31.4\ s$

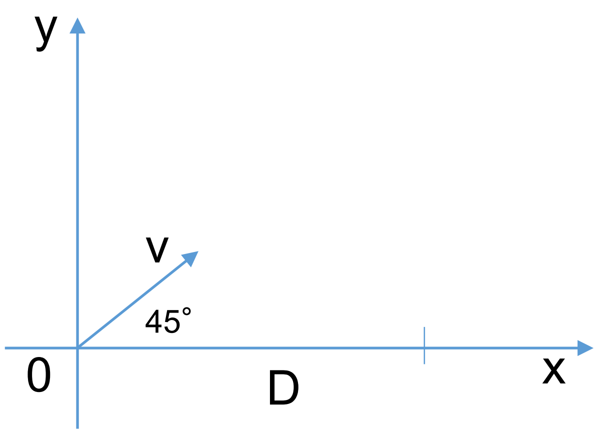
Quindi il modulo dell'accelerazione e':

$$|\overrightarrow{a_{(t)}}| = \sqrt{|\overrightarrow{a_t}|^2 + |\overrightarrow{a_c}|^2} = \sqrt{\alpha^2 R^2 + (\alpha^2 t^2 R)^2} = \alpha R \sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$$

$$|\overrightarrow{a_{(\Delta t)}}| = \alpha R \sqrt{1 + \alpha^2 \Delta t^4} = 49.3\ m/s^2 \sim 5g$$

Esercizio 2

Nello sport del lancio del martello, una sfera di acciaio legata ad un cavo di lunghezza L= 1.25 m viene lanciata dopo essere stata posta in rotazione.
Sapendo che il record di questa specialità è D= 84.8 m, determinare la velocità con cui deve essere lanciato il martello (supponiamo che l'angolo di lancio rispetto all'orizzontale sia di 45° e trascuriamo l'altezza dell'atleta) e l'accelerazione centripeta della sfera al momento del lancio.



Il martello compie un moto parabolico dopo il lancio.

Esercizio 2

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t \\ y = v_{0y}\, t - 1/2\, g t^2 \end{cases}$$

equazioni del moto

<u>E' fondamentale prima di tentare qualsiasi tipo di risoluzione scrivere le equazioni del moto ed indicare eventuali vincoli dovuti alla situazione descritta nel testo.</u>

Ponendo i vincoli che al tempo t* il martello si trovi nella posizione tale che

$x = D$ e $y = 0$

otteniamo il valore di $v_0 = 28.84$ m/s

Esercizio 2

La velocità v_0 è pari alla velocità che ha raggiunto ruotando la sfera, il moto della sfera prima del lancio è di tipo circolare, il raggio della traiettoria descritta è pari alla lunghezza L del cavo. Quindi possiamo scrivere che:

$$\omega = \frac{v_0}{L} = 23.07\, rad/s$$

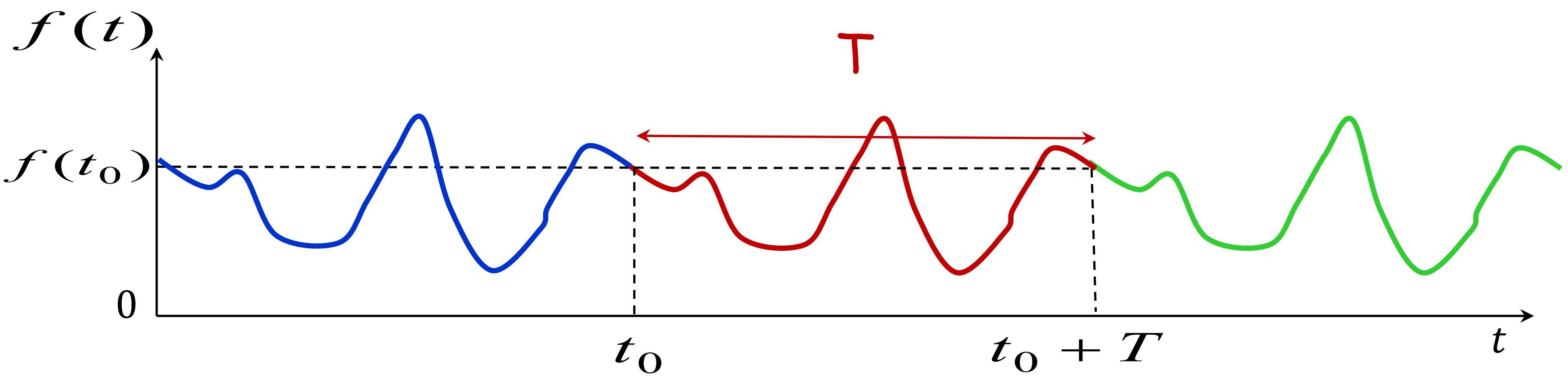
$$a_N = \omega^2 L = 665.51\, m/s^2$$

Il moto armonico

Università degli Studi di Padova

Si dice armonico un moto la cui legge oraria **f (t)** è una **funzione periodica, deve quindi esistere una costante T, detta periodo, tale che:**

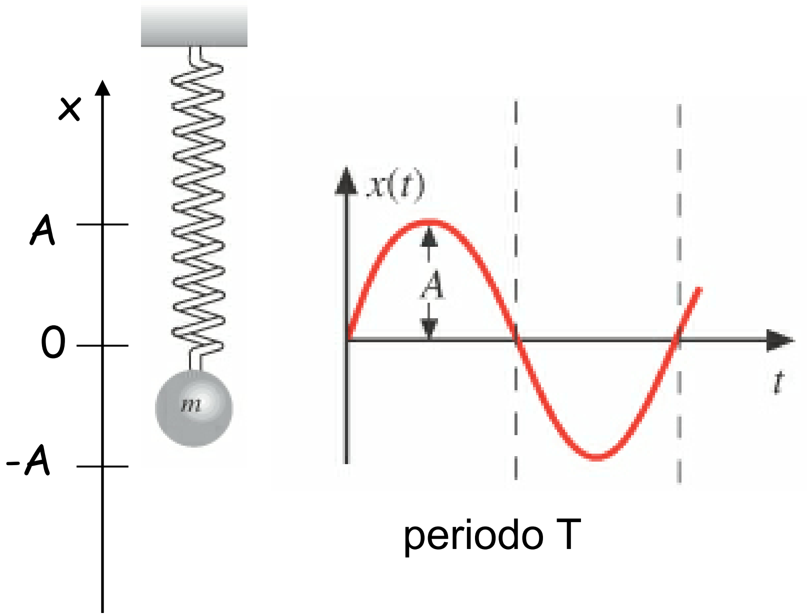
$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t$$



Applichiamo questa definizione ad una funzione che descrive una legge oraria ma il concetto è valido per qualsiasi grandezza descritta da una funzione periodica.

Il moto armonico

Università
degli Studi
di Padova



Osserviamo il moto di una massa appesa ad una molla, la vediamo oscillare intorno alla posizione x=0.
Si tratta di un **moto armonico**

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$A : \text{ampiezza} \equiv \text{max. valore di } x$$

$$\omega t + \varphi : \text{fase}$$

$$\omega : \text{pulsazione}$$

$$\varphi : \text{fase iniziale} \equiv \text{fase per } t = 0$$

Il moto armonico

Università degli Studi di Padova

Il periodo T è il tempo necessario a descrivere un'oscillazione completa, la massa parte dalla posizione x=0, arriva alla massima compressione della molla nel punto x = A, quindi ripassa per la posizione x=0, arriva alla massima elongazione della molla nel punto x = -A e ritorna alla posizione x=0.

Imponendo la condizione di periodicità $f(t+T)=f(t)$

Nel caso della legge oraria di tipo sinusoidale otteniamo che:

$$(\omega t_2+\phi)-(\omega t_1+\phi)=2\pi$$

$$\Rightarrow \omega(t_2-t_1)=\omega T=2\pi$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}$$

T è il periodo del moto ed è indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni

Definiamo la frequenza come l'inverso del periodo, la sua unità di misura è l'Hertz [Hz].

$$\upsilon=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

Il moto armonico

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$

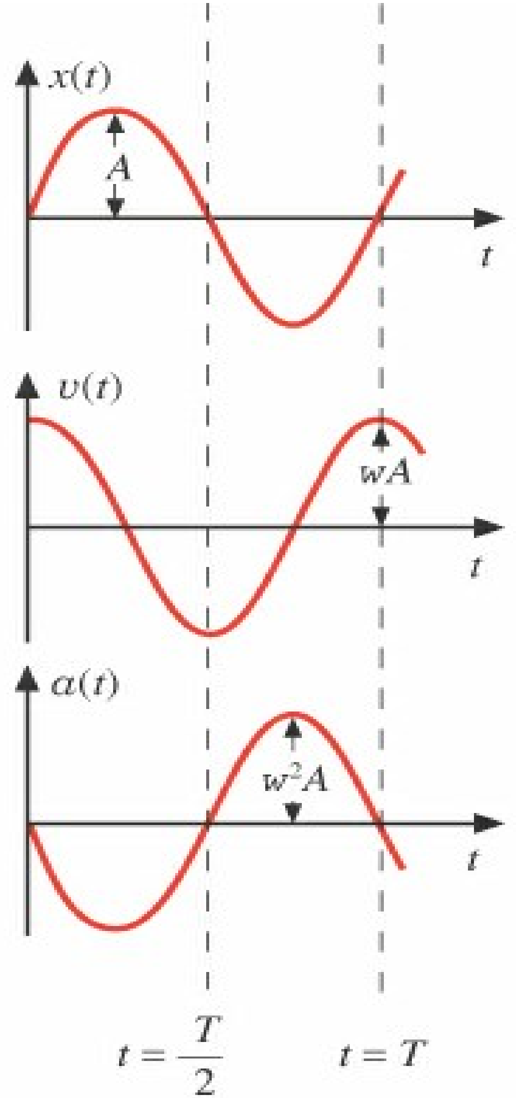
Legge oraria

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi)}$$

Massima al centro (ωA), nulla agli estremi.

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} \Rightarrow a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) \\ &= -\omega^2 x(t) \end{aligned}}$$

Massima agli estremi (ω^2A), nulla al centro



Il moto armonico

Notiamo che

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Questa equazione differenziale del secondo ordine ha come soluzioni le funzioni periodiche di tipo:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Quindi il moto risultante sarà un moto armonico