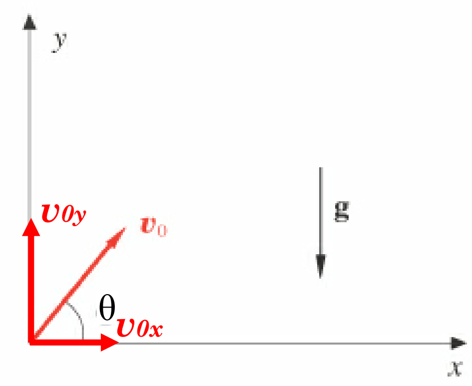
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Moto parabolico

Moto parabolico

Università degli Studi di Padova



Condizioni iniziali (t = 0): parte dall'origine $x_0 = y_0 = 0$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta \; \vec{u}_x + v_0 \sin\theta \; \vec{u}_y = v_{0x} \; \vec{u}_x + v_{0y} \; \vec{u}_y$$

$$\vec{a} = \vec{g} = -g \, \vec{u}_y \qquad (a_x = 0, a_y = -g)$$

Le equazioni del moto sono:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} \, dt = \vec{v}_0 - gt \, \vec{u}_y = v_0 \cos\theta \; \vec{u}_x + (v_0 \sin\theta - gt) \; \vec{u}_y$$

v_x costante $\qquad$ v_y variabile

$$x(t) = v_x t = v_0 \cos\theta \; t$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

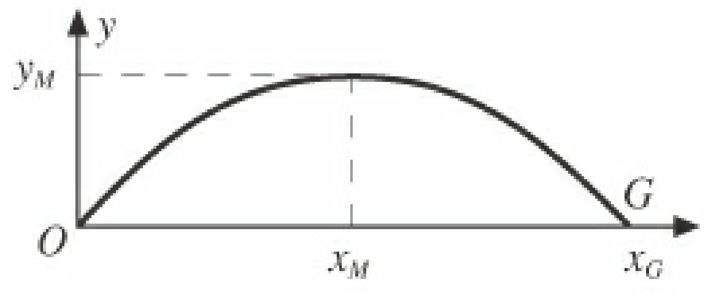
$$y(t) = v_0 \sin\theta \; t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$\boxed{y(x) = x \tan\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2}$$

Equazione della traiettoria (parabola)

Traiettoria parabolica

Università degli Studi di Padova



La parabola incontra l'asse x in due punti: condizione $\boxed{y(x) = 0}$

1) x = 0 (all'origine)
2) x_G: gittata

$$x_G = \frac{v_0^2\, 2\sin\theta\cos\theta}{g} = 2x_M$$

$$x_G = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

L'altezza massima: condizione

$$v_y = 0, \text{oppure } \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_M = y(x_M) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

La gittata massima condizione:

$$\frac{dx_G}{d\theta} = 0 \rightarrow 2\theta = 90°$$

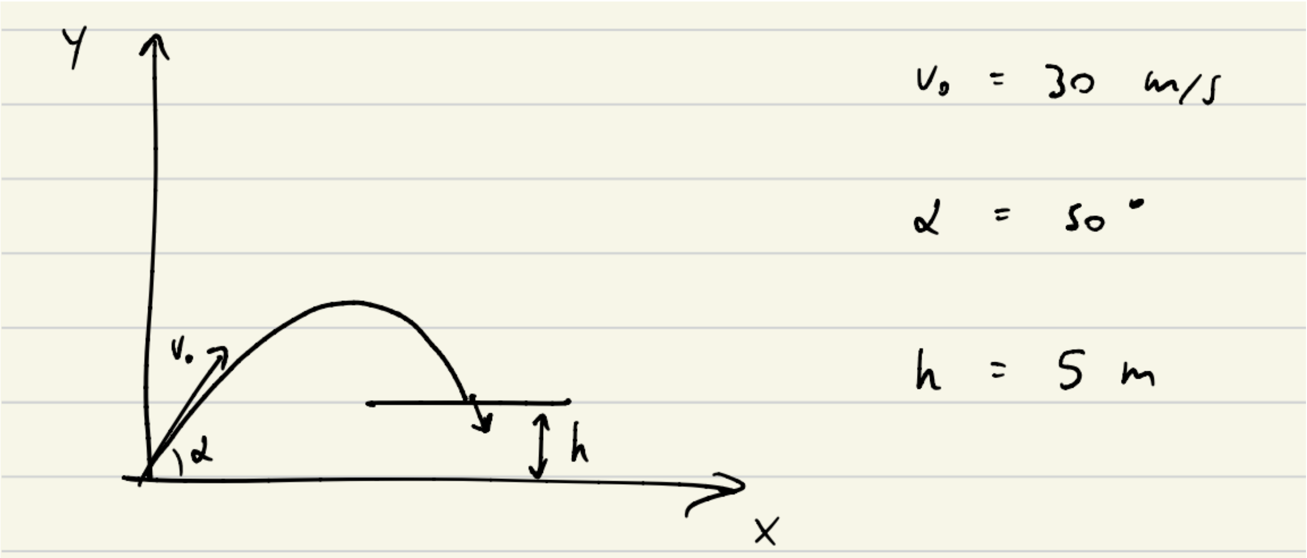
$$\theta = 45° \Rightarrow x_{GM} = \frac{v_0^2}{g}$$

Tempo di volo: $t_G = \dfrac{x_G}{v_x} = \dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$

- Il tempo di salita è uguale a quello di discesa
- La velocità al suolo e uguale quella iniziale
- $v(x_M) = v_{ox}$

Esercizio 1

Un giocatore di golf colpisce una pallina con velocità iniziale di modulo 30 m/s e un angolo di 50 gradi sopra l'orizzontale. La pallina atterra su di un prato che è 5 m al di sopra del livello di quello dove era stata battuta: a) per quanto tempo resta in aria la pallina? b) quale distanza ha percorso la pallina in direzione orizzontale quando atterra? c) quali sono il modulo e la direzione della velocità della pallina un istante prima dell'atterraggio?



Esercizio 1

Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = (v_0 \cos\alpha) \\ v_y = (v_0 \sin\alpha) - g t \end{cases}$$

Inseriamo il vincolo del problema, **la pallina tocca terra quando y = h**

$$h = (v_0 \sin\alpha)\, \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2$$

$$\frac{1}{2} g \bar{t}^2 - (v_0 \sin\alpha)\, \bar{t} + h = 0$$

Esercizio 1

Risolviamo l’equazione di secondo grado e otteniamo che:

$$\bar{t}_{1,2} = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{g}\left[v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g h}\right]$$

$$= \begin{cases} 4.5\ \mathrm{s} & (\text{soluzione col } +) \\ 0{,}23\ \mathrm{s} & (\text{soluzione col } -) \end{cases}$$

Esercizio 1

Scriviamo le equazioni del moto lungo l'asse x:

$$x = (v_0 \cos\alpha)\, t$$

Calcoliamo il valore dello spazio percorso inserendo il valore del tempo calcolato in precedenza:

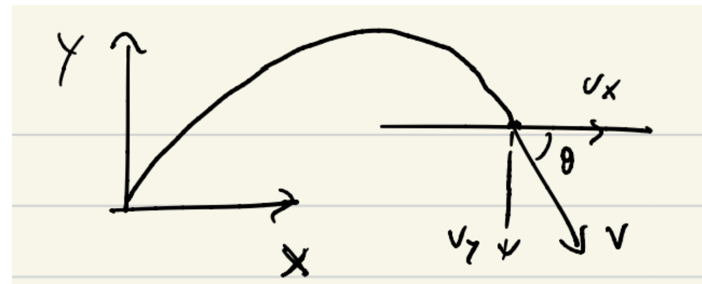
$$x(\bar{t}) = (v_0 \cos\alpha)\, \bar{t}$$

$$= 30\ m/s\ \cos 50^\circ \cdot 4.5\ s = 87\ m$$

Esercizio 1

Prima dell'atterraggio possiamo scrivere le equazioni del moto e valutare v al tempo noto:

$$\begin{cases} v_x = (v_0 \cos\alpha) \\ v_y = (v_0 \sin\alpha) - g\,t \end{cases}$$



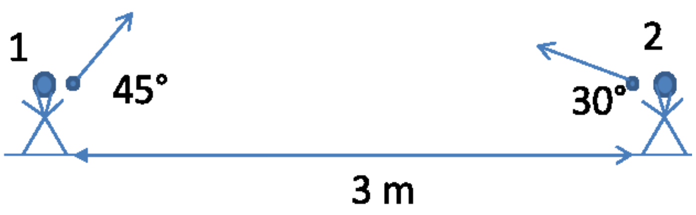
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 27 \ m/s$$

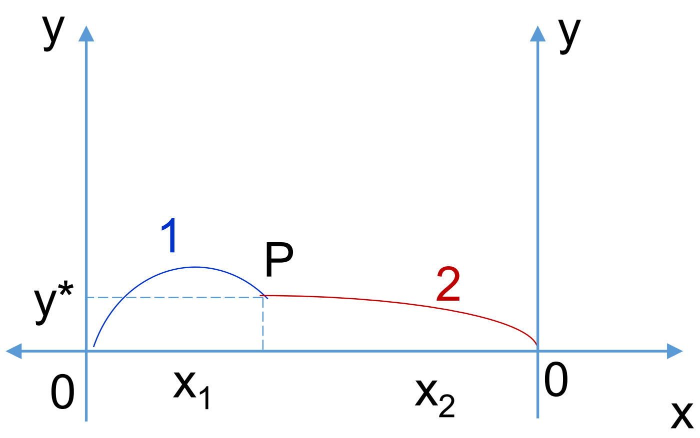
$$\theta = \arctan \frac{v_x}{v_y} = -47^\circ$$

Esercizio 2

Università degli Studi di Padova

Due giocolieri della stessa altezza si trovano di fronte ad una distanza di 3 m, allo stesso istante entrambi lanciano una pallina, indicate con 1 e 2 in figura.
La pallina 1 viene lanciata con un angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale di 45° e velocità iniziale v_1=10 m/s. La pallina 2 viene lanciata con un angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale di 30° e velocità iniziale v_2= 14.1 m/s. Le due palline si incontrano in volo, calcolare le coordinate del punto di collisione.





Le palline si incontrano nel punto P all'istante t*.

Esercizio 2

All'istante t* la pallina 1 avrà coordinate x_1, y_1 mentre la pallina 2 avrà coordinate x_2, y_2 nei propri sistemi di riferimento.

Entrambe le palline descrivono un moto parabolico e la circostanza che si incontrino ci da in vincolo che $x_1 + x_2 = 3$ m e $y_1 = y_2 = y^*$

Posso scrivere quindi che

$$\begin{cases} x_1 = v_{1x}\, t^* \\ y_1 = v_{1y}\, t^* - 1/2\, g t^{*2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = v_{2x}\, t^* \\ y_2 = v_{2y}\, t^* - 1/2\, g t^{*2} \end{cases}$$

con le condizioni

$x_1 + x_2 = 3$

$y_1 = y_2$

Esercizio 2

Sostituendo i valori numerici noti ottengo che

$v_{1x}\, t^* + v_{2x}\, t^* = 3$

$t^*(10 \cos 45° + 14.1 \cos 30°) = 3$

Quindi $t^* = 0.156$ s

La relazione $y_1=y_2$ è sempre vera di conseguenza.

Sostituendo il valore di t^* nelle equazioni del moto calcolo le coordinate del punto P che sono (1.103 , 0.985) m.