Lezione 4 (13 ottobre 2023)

Ricordo che venerdì 20/10 non farò lezione

Il metodo di punto fisso consente di determinare <u>uno zero</u> di f trasformando il problema $f(x)=0$ in un problema di punto fisso

$$x = g(x)$$

consentendo di generare la successione

$$\boxed{x_{k+1} = g(x_k)} \qquad (1)$$

partendo da $x_0 \in I_\alpha$ con I_α intorno dello zero α.

- Di <u>funzioni d'iterazione</u> g ne esistono molte, cercheremo quelle che sono delle <u>contrazioni</u> ovvero quelle per cui

$$g(I_\alpha) \subset I_\alpha$$

Teorema

Se g è derivabile in I_α ed esiste un $\mu < 1$ t.c.

$$|g'(x)| \le \mu < 1 \quad \forall x \in I_\alpha$$

allora g ha un unico punto fisso α in I_α. Inoltre la successione generata da (1) converge verso α per ogni scelta di $x_0 \in I_\alpha$

Infine

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |g'(\alpha)|$$

Infatti

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)|$$

$$= |g'(\xi_k)| \, |x_k - \alpha|$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |g'(\xi_k)|$$
$\hookrightarrow \alpha$

Messaggio: tra tutte le g cercheremo quelle per cui

$$|g'(x)| < 1 \quad \forall\, x \in I_\alpha$$

Esempio

$$f(x) = e^{-x} - \sin(x)$$

$\alpha \approx 0.6$ (si vede studiandone il grafico)

$$f(x) = 0 \implies x = g(x)$$

$$e^{-x} - \sin x = 0$$

$$e^{-x} = \sin x$$

$$x = \underbrace{\arcsin\left(e^{-x}\right)} \longrightarrow g_1(x)$$

$$e^{-x} - \sin x = 0$$

$$e^{-x} = \sin x$$

$$x = \underbrace{-\log(\sin x)} \longrightarrow g_2(x)$$

Dal punto di vista del calcolo per costruire la successione posso lavorare usando 2 variabili

$$\underbrace{x_0}_{\substack{\text{contiene} \\ \text{valore iniziale} \\ \text{e quello vecchio } (x_k)}} \quad e \quad x_1 \rightarrow \text{contiene il valore aggiornato } \varphi(x_k) = x_{k+1}$$

ORDINE DI CONVERGENZA

Le iterazioni di punto fisso convergono almeno linearmente

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$$

<u>Definizione</u>

Sia $\{x_k\}$ convergente ad α

Consideriamo $|e_k| = |x_k - \alpha|$

Se esiste un $p \in \mathbb{R}$ e una costante $0 < \gamma < +\infty$ t.c.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p} = \gamma$$

allora la successione ha ordine di convergenza p.

La costante γ viene chiamata costante asintotica di convergenza

Alcuni casi interessanti

$p=1$	$0<\gamma<1$	lineare
$p=1$	$\gamma=1$	sub lineare (convergenza molto lenta)
$1<p<2$		superlineare
$p=2$		quadratica
$p=3$		cubica

È auspicabile avere metodi che convergono con ordine elevato

Metodo pratico per determinare p

Partiamo dalla definizione di O.C.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p} = \gamma \neq 0$$

$$|x_{k+1}-\alpha| = |x_k-\alpha|^p \cdot \gamma$$

$$\log|x_{k+1}-\alpha| = p \log|x_k-\alpha| + \log\gamma$$

$$\frac{\log|x_{k+1}-\alpha| - \log\gamma}{\log|x_k-\alpha|} = p$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log|x_{k+1}-\alpha| - \cancel{\log\gamma}}{\log|x_k-\alpha|}$$

$$\boxed{p \approx \lim_{k\to+\infty} \frac{\log|x_{k+1}-\alpha|}{\log|x_k-\alpha|} \qquad (2)}$$

Osservazione: in generale non conosciamo α

In (2) invece di α posso considerare una sua approssimazione x_m con $m >> k+1$

Teorema Se g, funzione d'iterazione, è derivabile p volte con continuità in I_α con α radice semplice di f per cui

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$$

$$g^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

allora il metodo ha ordine p

Dim

$$g(x) = g(\alpha) + (x-\alpha)g'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2} g''(\alpha) + \dots + g^{(p)}(\xi)\frac{(x-\alpha)^p}{p!}$$

usando l'ipotesi sulle derivate si conclude

Esempio 1

$$f(x) = e^{1-x} - 1$$

se $x = 1$ $\quad f(1) = 0 \implies x = 1$ radice

$$\underbrace{x + f(x)}_{g(x)} = 0 + x$$

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k + \underbrace{e^{1-x_k} - 1}_{f(x_k)}}_{g(x_k)}$$

1) Qual è il punto fisso di g? Sappiamo già

2) Qual è l'ordine di convergenza del metodo iterativo

$$g(x) = x + e^{1-x} - 1$$

$$g'(x) = 1 - e^{1-x}$$

$$g'(1) = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$$

Dal teorema precedente so che il metodo ha ordine almeno quadratico

$$g''(x) = e^{1-x}$$

$$g''(1) = e^{0} = 1 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ il metodo ha ordine 2

Provare a calcolare l'errore

$$|e_k| = |x_k - 1|$$

<u>radice semplice</u>

$$f(\alpha) = 0$$

$$f^{(k)}(\alpha) \neq 0 \qquad k \geq 1$$

<u>Esempio</u> $\quad f(x) = x^2 \qquad f(0) = 0$

$x = 0$ è doppia $\quad f'(0) = 0$

Se α è radice di molteplicità m

allora $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$

h non si annulla in α

$$g(x) = g(\alpha) + g^{(p)}(\xi)\,\frac{(x-\alpha)^p}{p!}$$

applico il metodo iterativo al passo k-esimo

$$\underbrace{g(x_k)}_{x_{k+1}} - \underbrace{g(\alpha)}_{\alpha} = g^{(p)}(\xi_k)\,\frac{(x_k-\alpha)^p}{p!}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^p}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{g^{(p)}(\xi_k)}{p!}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p} = \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

$\Longrightarrow$ p è ordine di convergenza

Esempio 2

Consideriamo l'iterazione

$$g(x) = x\,(2 - qx) \qquad q > 0$$

(a) quali sono i punti fissi di g?

(b) considero $x_{k+1} = g(x_k)$

determinare l'intervallo I_α di convergenza alla radice positiva α

(c) calcolare l'ordine di convergenza del metodo iterativo

Svolgo

(a)

$$x = x\,(2 - qx)$$

$$x = 2x - qx^2$$

$$qx^2 - x = 0$$

$$(qx - 1)\,x = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad \underline{\underline{x_2 = 1/q > 0}} \quad (q > 0)$$

(b) $\alpha = 1/9$

per determinare l'intervallo devo risolvere

$$|g'(1/9)| < 1$$

Ora $$|\underbrace{2(1-9x)}_{g'(x)}| < 1$$

$$|g'(x)| < 1$$

$$\frac{1}{29} < x < \frac{3}{29}$$

$$\frac{1}{29} < \frac{1}{9} < \frac{3}{29}$$

$I_{1/9} = \left(\frac{1}{29}, \frac{3}{29}\right)$ è l'intervallo richiesto

Notiamo inoltre che

$$g'\left(\frac{1}{9}\right) = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ il metodo quindi converge alla radice in $I_{1/9}$

(c) $g'(1/9) = 0$ posso pensare che il metodo abbia ordine almeno quadratico

$$g''(1/9) = -29 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ il metodo ha ordine quadratico

Esempio 3

$$f(x) = x^2 - \sin(\pi x)\, e^{-x} \qquad x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

Individuare un metodo di punto fisso convergente all'unica radice α di f in $\left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$

Sugg: $f\left(\tfrac{1}{2}\right) f(1) \overset{?}{<} 0$

$f\left(\tfrac{1}{2}\right) < 0 \qquad f(1) > 0 \qquad$ OK

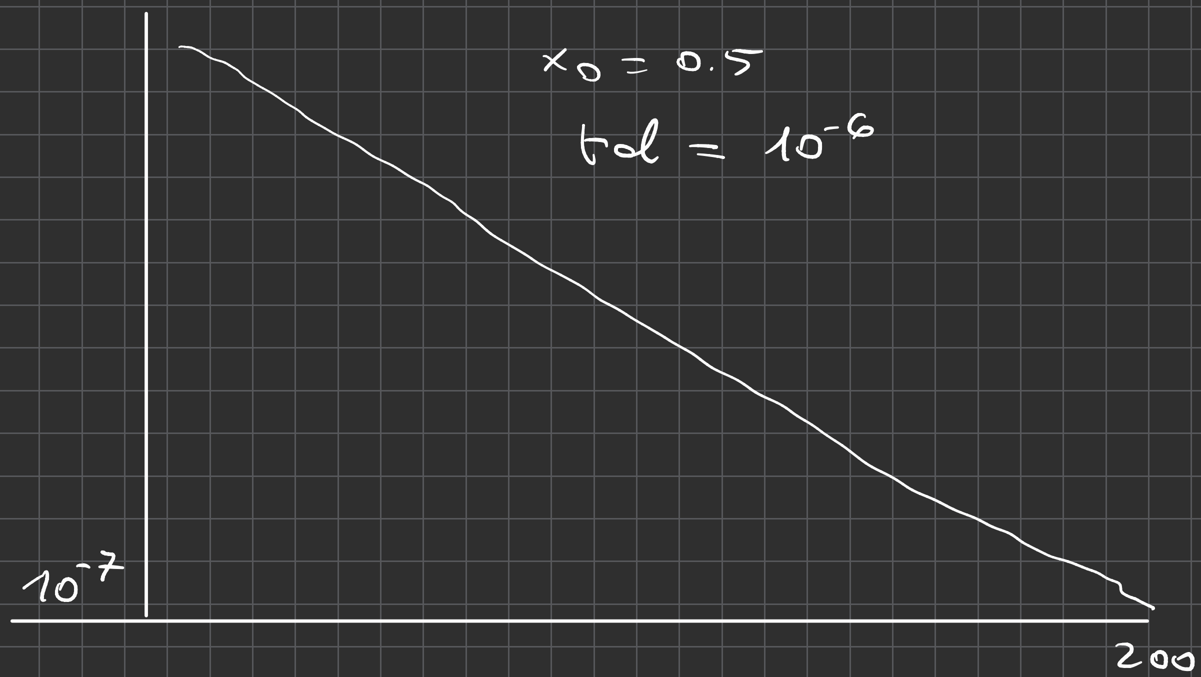
poi con un minimo di studio della derivata prima (che è sempre crescente) si ottiene che c'è uno e uno solo zero in $\left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$

$$g(x) = \sqrt{\sin(\pi x)\, e^{-x}}$$

Scoprirete che $\quad -0.4 \gtrsim g' \gtrsim -0.98$

in $[0.5, 0.68]$

Provate a calcolare gli errori in maniera automatica



TEST D' ARRESTO

$$|x_{k+1} - x_k|$$

scarto

Verifichiamo che se

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

allora questo è un "buon" criterio di arresto

$$x_{k+1} - \alpha = g(x_k) - g(\alpha) = g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$$

$$\xi_k \in [\alpha, x_k]$$

Ora

$$x_{k+1} - \alpha = x_{k+1} - x_k + x_k - \alpha$$

$$x_{k+1} - x_k + x_k - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$$

$$(x_k - \alpha)(1 - g'(\xi_k)) = x_k - x_{k+1}$$

$$x_k - \alpha = \frac{x_k - x_{k+1}}{1 - g'(\xi_k)}$$

$$|e_k| = |x_k - \alpha| = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|1 - g'(\xi_k)|}$$

- $g'(x) \approx 0$ in I_α e in particolare in $x = \xi_k$ allora l'errore viene stimato bene dallo scarto

$$|e_k| = |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

- $g'(x) \approx 1$ la stima dell'errore esplode

Conclusione è che

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

è un buon test quando $|g'| \ll 1$

Per migliorare si può lavorare sullo scarto relativo

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon |x_{k+1}|$$

Per avere un test d'arresto "sicuro" si aggiunge un controllo sul numero delle iterazioni

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon |x_{k+1}| \quad + \quad k \leq k_{max}$$

il test che facciamo

finché

$$|x_{k+1} - x_k| \geq \varepsilon |x_{k+1}| \quad \& \quad k \leq k_{max}$$

si itera

non oppure $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon |x_{k+1}|$

oppure $k > k_{max}$

Si conclude

se $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon\, |x_{k+1}| \Longrightarrow$ converge

se $k > k_{max} \Longrightarrow$ non converge

Ha senso testare

$$|f(x_k)| < \varepsilon \; ?$$

Non ha senso perché