Lezione 3 (11 ottobre 2023)

- Stabilità degli algoritmi

Instabilità è dovuta ad esempio alla cancellazione numerica

In generale è un accumulo di errori algoritmici

Come evitarla? Ricorrendo a "formule" più stabili

- Condizionamento del problema numerico

A piccole variazioni sui dati devono corrispondere piccole variazioni sui risultati $\Longrightarrow$ problema è ben condizionato

Come evitare il mal-condizionamento? Non è sempre facile. La tecnica generale è ricorrere ad algoritmi (più) stabili

Nel caso della valutazione di una funzione $f(x_0)$ x_0 dato

$$|C(f, x_0)| = \left| f'(x_0) \frac{x_0}{f(x_0)} \right| < 1$$

Se $|C(f, x_0)| < 1 \implies$ l'errore si contrae

Esempio

$f(x) = \sin(\cos(x^2+1))$ valutiamola in $x=1$

$f(1)$ è ben condizionata?

$f'(x) = \cos(\cos(x^2+1))(-\sin(x^2+1) \cdot 2x)$

$$|C(f;1)| = \left|\frac{f'(1) \cdot 1}{f(1)}\right| = \left|\frac{\cos(\cos(2))(-\sin(2)) \cdot 2}{\sin(\cos(2))}\right|$$

$$= \underline{4.1149} > 1 \implies \text{mal condizionamento}$$

Per casa

$f(x) = x^5 - 2x + 1 \qquad g(x) = \dfrac{5x^2+2}{5x+224}$

Chi è meglio condizionata in $x_0 = 1.3$?

Esempio di buon condizionamento

$f(x) = \sqrt{x} \qquad x > 0$

$$|C(\sqrt{x}, x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{x}{\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2}$$ indipendentemente da x

$1/2 < 1 \implies$ valutare $\sqrt{x}$ $x > 0$ è ben condizionato

Per casa provate ad ottenere lo stesso risultato ricorrendo alla definizione di $C(f,x)$

$\tilde{y} = \sqrt{x+\delta x}$ $\quad$ δx è la perturbazione

$C = \frac{r}{d}$ $\quad$ $d = \frac{\delta x}{x}$

RICERCA di ZERI di FUNZIONE

$f(x) = 0$

In generale f può avere più valori x^* t.c. $f(x^*) = 0$

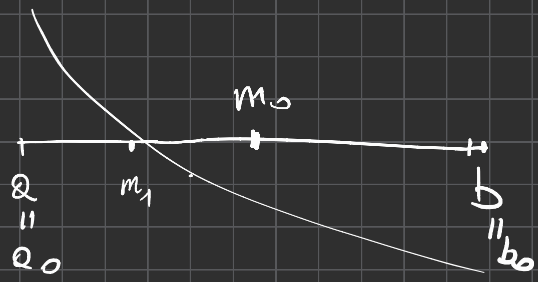
Per determinare un particolare x^* o α, t.c. $f(\alpha)=0$, la prima cosa da fare è isolare α

Significa trovare a e b t.c. $\alpha \in (a,b)$ e t.c.

$$f(a)f(b) < 0$$

e $[a,b]$ è il più piccolo intervallo che contiene lo zero α di f.

BISEZIONE



$a_0 = a$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $b_0 = b$

$$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

se $\quad f(m_0) f(a_0) < 0 \quad$ allora

$a_1 = a_0, \quad b_1 = m_0$

altrimenti

$a_1 = m_0, \quad b_1 = b_0$

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

se $\quad f(m_1) f(a_1) < 0 \quad$ allora

allora $\quad a_2 = a_1, \quad b_2 = m_1$

altrimenti

$a_2 = m_1, \quad b_2 = b_1$

- Ad ogni passo dimezzo l'intervallo (ecco xché si chiama metodo di bisezione)

- Costruisco per contro due successioni

$a_k \uparrow \qquad\qquad b_k \downarrow$

$k \geq 0$

Proposizione

se $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ha una sola radice α

allora il metodo di bisezione converge verso α

Dim: supp. $f(a) < 0 < f(b)$

Il metodo genera una successione $m_k \to \alpha$

Infatti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \dots \le a_n \dots \le b_n \dots \le b_2 \le b_1 \le b_0$$

$\{a_k\}$ monotona crescente

$\{b_k\}$ " decrescente

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \alpha^- \qquad \lim_{k \to +\infty} b_k = \alpha^+$$

$$\alpha^- \le \alpha^+ \in (a,b)$$

$$\alpha^+ - \alpha^- = \lim_{k \to +\infty} (b_k - a_k) =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{(b-a)}{2^k} = 0$$

$\hookrightarrow \quad \alpha^+ = \alpha^- = \alpha$

f è continua

$$\lim_{k \to +\infty} f(a_k) = f(\alpha) = \lim_{k \to +\infty} f(b_k)$$

$$\lim_{k\to+\infty} f(a_k) \leq 0$$

$$\lim_{k\to+\infty} f(b_k) \geq 0$$

dal teorema del confronto

$$\Longrightarrow \qquad 0 \leq f(\alpha) \leq 0 \quad \Longrightarrow f(\alpha) = 0$$

#

Osservazioni

1) $|I_k| = |b_k - a_k| = \frac{1}{2^k}|b-a|$

Guardiamo all'errore assoluto

$$|e_k| = |m_k - \alpha| < \frac{1}{2}|I_k| = \frac{1}{2^{k+1}}|b-a|$$

2) chiedere che $\quad |e_k| < tol$

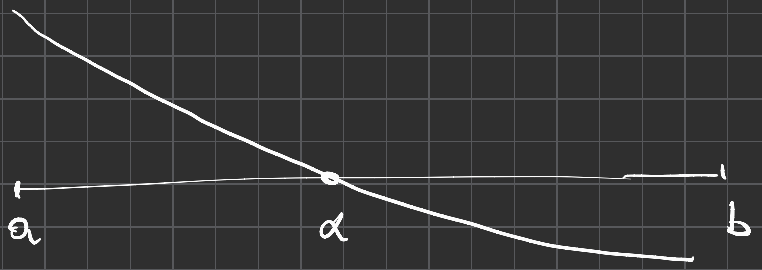
$$|e_k| < \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}|b-a| < tol}$$

$$\frac{|b-a|}{tol} < 2^{k+1}$$

$$\log_2 \frac{|b-a|}{tol} < k+1$$

$$\boxed{\log_2 \frac{|b-a|}{tol} - 1 < k}$$

$$|f(m_k)| \approx 0$$

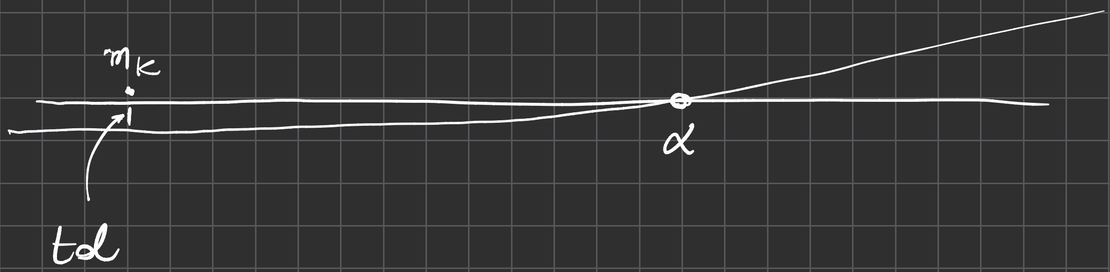


ovvero

$$|f(m_k)| < tol$$

Se sì m_k è la soluzione cercata oppure

$\alpha = \frac{a_k + b_k}{4}$ prendila come approssimazione di α



METODO DEL PUNTO FISSO

$$f(x) = 0 \longrightarrow x = g(x)$$

tale che $\alpha = g(\alpha)$

<u>Esempio</u>

$f(x) = x^4 - 5$ $\qquad\qquad$ $f(x) = 0$

(i) $\quad x = \underbrace{x^4 - 5 + x}_{g(x)}$

(ii) $\quad x^4 - 5 = 0 \qquad x = \underbrace{5/x^3}_{g(x)}$

(iii) $\quad x = \sqrt{5/x^2}$

trasformare $f(x)=0$ in $x=g(x)$
esistono infiniti modi

<u>Definizione</u>

La trasformazione $f(x)=0$ in $x=g(x)$ con g che ha la stessa radice α di f permette di costruire una iterazione

dato x_0

$$x_{k+1}=g(x_k) \qquad k\geq 0$$

g viene detta FUNZIONE D'ITERAZIONE

Mediante la g costruisco la successione $\{x_k\}$ che si spera converga verso α

<u>PRIMA DOMANDA</u>

Tutte le funzioni d'iterazione sono equivalenti per trovare α ?

<u>Risposta</u>: NO

<u>TEOREMA</u> (Banach - Caccioppoli)

Supponiamo che $g([a,b])\subset[a,b]$
e che esiste $L<1$ t.c.

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L\, |x_1 - x_2|$$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

Allora esiste un unico punto fisso della funzione d'iterazione g.
Inoltre la successione $\{x_k\}_{k \geq 0}$, x_0 fissato è convergente verso α

<u>Dim</u> L'ipotesi che $g([a,b]) \subset [a,b]$ mi garantisce che esiste un unico α in (a,b)

$$\phi(x) = g(x) - x$$

$$\phi(a) = g(a) - a \geq 0 \qquad \phi(b) = g(b) - b \leq 0$$

supponiamo esistano 2 valori t.c. $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| \leq L\,|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$\hookrightarrow$ assurdo $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

Per concludere devo provare che $\{x_k\} \to \alpha$

$$0 \leq |x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| \leq L\,|x_k - \alpha|$$

$$\leq \cdots \leq \underbrace{L^{k+1}}_{\to 0}\, |x_0 - \alpha|$$

Pertanto per ogni $k \geq 0$

$$0 \leq \frac{|x_k - \alpha|}{|x_0 - \alpha|} \leq L^k \to 0$$

$$\Longrightarrow \{x_k\} \longrightarrow \alpha$$

#

Se g è derivabile e $|g'(x)| < 1$ $\forall x \in [a,b)$ allora $\{x_k\} \longrightarrow \alpha$

$$x_{k+1} = g(x_k)$$