Incontro del 10 ottobre

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 1.1](Caratterizzazione sequenziale della chiusura). Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $x \in X$. Provare che $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$.

Svolgimento. Proviamo prima l'implicazione $(\Leftarrow)$. Sia quindi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $x \notin \overline{A}$. Applicando la definizione di chiusura (vedi [2, Definizione 2.1.3]) ciò ci dice che esiste un $\overline{r} > 0$ tale che

$$B(\overline{r}, x) \cap A = \emptyset. \tag{A}$$

Ma dalla definizione di convergenza (vedi [2, Definizione 1.4.1]) abbiamo anche che $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Ciò vuol dire che esiste un $\overline{n} > 0$ tale che $d(x_n, x) < \overline{r}$ per ogni $n > \overline{n}$. In altre parole $x_n \in B(\overline{r}), x$ per ogni $n > \overline{n}$. Ma $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $x_n \in A \cap B(r, x)$ per ogni $n > \overline{n}$ contraddicendo (A). Vediamo l'implicazione $(\Rightarrow)$. Sia $x \in \overline{A}$. Sappiamo che per ogni $r > 0$ si ha che

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset. \tag{B}$$

Per $n \in \mathbb{N}$ scegliamo il raggio della palla in (B) come $\frac{1}{n}$. In particolare abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere un x_n nell'intersezione non vuota $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$; in altre parole scegliamo

$$x_n \in B(x, \tfrac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset.$$

Inoltre, siccome $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ abbiamo che $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Quindi tale successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è quella cercata. □

Esercizio 2. [1, Esercizio 1.2] Siano (X, d) uno spazio metrico ed $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

(i) $\mathring{A}$ è il più grande insieme aperto contenuto in A;

(ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Svolgimento. (i) Dalla definizione di interno di un insieme (vedi [2, Definizione 2.1.1]) risulta immediato che se abbiamo due insiemi $U_1, U_2 \subseteq X$ tali che $U_1 \subseteq U_2$ abbiamo che $\mathring{U}_1 \subseteq \mathring{U}_2$. Sia quindi B un aperto tale che $B \subseteq A$. Ma allora $\mathring{B} = B \subseteq \mathring{A}$ da cui la tesi.

(ii) Dalla definizione di chiusura di un insieme (vedi [2, Definizione 2.1.3]) risulta immediato che se abbiamo due insiemi $U_1, U_2 \subseteq X$ tali che $U_1 \subseteq U_2$ abbiamo che $\overline{U_1} \subseteq \overline{U_2}$. Sia quindi B un chiuso tale che $B \supseteq A$. Ma allora $\overline{B} = B \supseteq \overline{A}$ da cui la tesi.

□

Esercizio 3. [1, Esercizio 1.3] Siano (X, d) uno spazio metrico ed $A \subseteq X$. Provare che $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$.

Svolgimento. Vediamo prima l'inclusione ($\subseteq$). Sia $p \in \overline{A}$: ciò vuol dire che per ogni $r > 0$ si ha che
$$B(p, r) \cap A \neq \emptyset.$$
A questo punto abbiamo due possibilità:
$$B(p, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \text{ oppure } \exists r > 0 \text{ s.t. } B(p, r) \cap (X \setminus A) = \emptyset.$$
Nel primo caso abbiamo che $p \in \partial A$ mentre nel secondo $p \in \mathring{A}$. L'inclusione ($\supseteq$) segue immediatamente dal fatto che $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ e dal fatto che $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} \subseteq \overline{A}$. $\square$

Esercizio 4. [1, Esercizio 1.4] Sia $l^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:
$$l^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\}.$$

1. Verificare che $l^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le naturali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successione.
2. Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : l^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita
$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{|a_n| \in \mathbb{R} \text{ s.t. } n \in \mathbb{N}\}.$$
definisce una norma.
3. Verificare che la funzione $d_\infty : l^\infty \times l^\infty \to [0, +\infty)$ così definita
$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_{l^\infty}$$
è una distanza su $l^\infty(\mathbb{R})$.

Svolgimento. 1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dobbiamo mostrare che $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$. Sappiamo che esistono $C_a, C_b > 0$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|a_n| \leq C_a$ e $|b_n| \leq C_b$. Abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha||a_n| + |\beta||b_n| < |\alpha|C_a + |\beta|C_b < +\infty.$$

2. Vediamo che $\|\cdot\|_\infty$ è davvero una norma (vedi [2, Definizione 1.3.1]): è chiaro che è non-negativa: se abbiamo che $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = 0$ segue che $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione identicamente nulla che è lo zero dello spazio vettoriale $l^\infty(\mathbb{R})$. Sia invece $\lambda \in \mathbb{R}$: abbiamo che
$$\|\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |\lambda a_n| = |\lambda| \sup_{\mathbb{N}} |a_n| = \lambda\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$
Ci resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare: siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$: abbiamo che
$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |a_n + b_n| \leq$$
$$\leq \sup_{\mathbb{N}}(|a_n| + |b_n|) = \sup_{\mathbb{N}} |a_n| + \sup_{\mathbb{N}} |b_n| = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty + \|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

3. Il fatto che d_∞ sia una distanza segue immediatamente dal fatto che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma (vedi [2, Definizione 1.3.1]).

$\square$

Esercizio 5. [1, Esercizio 1.5] Sia (X,d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X\times X \to [0,+\infty)$ come

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad x,y \in X.$$

Verificare che (X,δ) è uno spazio metrico e che ha la stessa topologia di (X,d).

Svolgimento. Dobbiamo verificare che δ sia effettivamente una distanza (vedi [2, Definizione 1.1.1]). É chiaro che visto che anche d è una distanza si ha che $\delta(x,y) \geq 0$ per ogni $x,y \in X$, $\delta(x,y) = 0$ se e solo se $x = y \in X$ e $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ per ogni $x,y \in X$. Ci resta da mostrare la disuguaglianza triangolare: siano $x,y,z \in X$: vogliamo vedere che

$$\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y).$$

Abbiamo che

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)}$$

ora usiamo la disuguaglianza triangolare di d e otteniamo

$$1 - \frac{1}{1+d(x,y)} \leq 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)+d(y,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} =$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(z,y)} = \delta(x,z)+\delta(z,y).$$

Per provare che la topologia indotta da δ coincide con quella indotta da d ci basta mostrare che ogni palla centrata in un certo $x \in X$ in una metrica indotta da δ contiene una palla centrata in x nella metrica indotta da d e viceversa. Questo è vero visto che per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$ si ha che

$$B_d(x,r) \subseteq B_\delta(x,r) \text{ e } B_\delta(x, \tfrac{r}{r+1}) \subseteq B_d(x,r).$$

□

Esercizio 6. [1, Esercizio 1.6] Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2+1} \in \mathbb{R} \text{ s.t. } p,q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Calcolare la chiusura $\overline{A} \subseteq \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Cerchiamo di capire chi possa essere $\overline{A}$. Ricordiamo che per ogni $p,q \in \mathbb{R}$ si ha che $(p-q)^2 \geq 0$. Ciò implica che $pq \leq \frac{1}{2}(p^2+q^2)$. Analogamente abbiamo che $(p+q)^2 \geq 0$. Ciò implica che $-\frac{1}{2}(p^2+q^2) \leq pq$. Quindi abbiamo

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{p^2+q^2}{2p^2+2q^2+2} \leq \frac{pq}{p^2+q^2+1} \leq \frac{p^2+q^2}{2p^2+2q^2+2} \leq \frac{1}{2}.$$

Ora $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ è un chiuso e $A \subseteq [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ quindi $\overline{A} \subseteq [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Vediamo che vale l'inclusione opposta e che quindi in realtà si ha che $\overline{A} = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Sia quindi $\overline{y} \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Vediamo quindi che esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{y}$. Consideriamo la funzione $y = \frac{x}{1+x^2}$: essa è una biezione quando manda $[-1,1]$ in $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Quindi esiste un unico $\overline{x} \in [-1,1]$ tale che $\overline{y} = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}^2}$. Ora siccome $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ è denso in $[-1,1]$ abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x_n \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ tale che $|\overline{x} - x_n| \leq \frac{1}{n}$. In altre parole possiamo trovare una successione

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [-1,1]\cap\mathbb{Q}$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{x}$. Visto che $x_n \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$ vuol dire che esistono $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ ed $\beta_n \in \mathbb{N}$ tali che $x_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$. In particolare $n\alpha_n \in \mathbb{Z}$ e $n\beta_n \in \mathbb{N}$. Ora osserviamo che

$$A \ni \frac{(n\alpha_n)(n\beta_n)}{n^2\alpha_n^2 + n^2\beta_n^2 + 1} = \frac{\frac{\alpha_n}{\beta_n}}{\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 + 1 + \frac{1}{n^2\beta_n^2}} = \frac{x_n}{(x_n)^2 + 1 + \frac{1}{n^2\beta_n^2}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\overline{x}}{\overline{x}^2+1} = \overline{y}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo diviso numeratore e denominatore per $n^2\beta_n^2$. La successione

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(n\alpha_n)(n\beta_n)}{n^2\alpha_n^2 + n^2\beta_n^2 + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

è quindi quella cercata. □

Esercizio 7. [1, Esercizio 1.7] Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato, $x \in A$ ed $r \subseteq \mathbb{R}^n$ una semiretta uscente da x. Provare che $r \cap \partial A \neq \emptyset$.

Svolgimento. Parametrizziamo la semiretta r come

$$r(t) = x + vt \text{ per } t \geq 0$$

dove $v \in \mathbb{R}^n$ è un versore opportunamente scelto. Cosideriamo ora l'insieme

$$I = \{t \geq 0 \text{ s.t. } r(t) \in A\}.$$

Sia ora $\overline{t} = \sup I$. Sappiamo che $0 < \overline{t}$ perchè A è aperto e che $\overline{t} < +\infty$ perchè A è limitato. Per definizione $r(\overline{t}) \in r$. Se mostriamo che $r(\overline{t}) \in \partial A$ abbiamo concluso. Vogliamo quindi mostrare che per ogni $s > 0$ si ha che

$$B(r(\overline{t}), s) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \text{ e } B(r(\overline{t}), s) \cap A \neq \emptyset$$

La prima condizione è vera perchè per ogni $s > 0$ si ha che $r(\overline{t} + \frac{s}{2}) \in B(r(\overline{t}), s) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Verifichiamo la seconda condizione: se $\overline{t} \in I$ allora $r(\overline{t}) \in A$ e abbiamo concluso; se invece $\overline{t} \notin I$ allora esiste una successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ tale che $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{t}$ ma ciò equivale a dire che per ogni $s > 0$ esiste un $t_n \in I$ tale che $\overline{t} - t_n = |r(\overline{t}) - r(t_n)| < s$. In particolare $r(t_n) \in B(r(\overline{t}), s) \cap A$. □

Esercizio 8. [1, Esercizio 2.1] Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che una qualsiasi funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua.

Svolgimento. Proviamo preliminarmente che la topologia indotta dalla distanza discreta (vedi [2, Esempio 1.1.2]) è quella discreta ovvero che ogni $A \subseteq X$ è aperto. Per fare ciò osserviamo che ogni $p \in A$ è un punto interno perchè $p = B(p, \frac{1}{2}) \subseteq A$. Infine usiamo la caratterizzazione topologica della continuità (vedi [2, Teorema 2.5.1]). Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ un aperto; $f^{-1}(B) \subseteq X$ che (siccome la topologia è discreta) è aperto. □

Esercizio 9. [1, Esercizio 2.5] Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza euclidea, $A \subset \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni

(i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow$ A aperto,

(ii) A aperto $\Rightarrow$ $f(A)$ aperto,

(iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow$ A chiuso,

(iv) A chiuso $\Rightarrow$ $f(A)$ chiuso.

Svolgimento. (i) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = |x|$ ed $A = (1,2) \cup \{-\frac{3}{2}\}$. Abbiamo che $f(A) = (1,2)$ che è un aperto, ma A non lo è.

(ii) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = \sin(x)$ ed $A = \mathbb{R}$. Abbiamo che A è un aperto, ma $f(A) = [-1,1]$ non lo è.

(iii) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = 1$ ed $A = (-1,1)$. Abbiamo che $f(A) = \{1\}$ che è un chiuso, ma A non lo è.

(iv) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ed $A = \mathbb{R}$. Abbiamo che A è un chiuso, ma $f(A) = (0,1]$ non lo è.

□

Esercizio 10. [1, Parte dell'esercizio 2.9] Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione continua ed $A \subset X$. Provare che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Svolgimento. Sia $y \in f(\overline{A})$. Vogliamo provare che $y \in \overline{f(A)}$. Lo facciamo usando la caratterizzazione sequenziale della chiusura (vedi [1, Esercizio 1.1]). Vogliamo quindi mostrare che esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ tale che $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} y$. Visto che $y \in f(\overline{A})$ esiste un $x \in \overline{A}$ tale che $f(x) = y$. Siccome $x \in \overline{A}$ esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$. Ma allora definendo $y_n := f(x_n)$ e ricordando che f è continua otteniamo la successione cercata. □

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf`

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf`