ERRORI dovuti al CALCOLO CON COMPUTER

$|x - \tilde{x}|$ errore <u>assoluto</u>

$\dfrac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$ errore <u>relativo</u> su x

$\dfrac{|x - \tilde{x}|}{|\tilde{x}|}$ " " su $\tilde{x}$

Fonti d' errore

① ERRORE DI RAPPRESENTAZIONE

TRONCAMENTO VS ARROTONDAMENTO

① TRONCAMENTO data una rappresentaz. con t cifre

nel troncamento dalla $t+1$ in poi si taglia

$p = 0.\underline{72358}4$ $t = 5$ $N = 10$

$\tilde{p} = 0.72358$

② ARROTONDAMENTO

se la $t+1$-esima cifra è ≥ 5

la t-esima si incrementa di

una unità

$p = 0.7243591$ $\quad t = 5 \quad N = 10$

$\tilde{p} = 0.72436$

anche $p = 0.7243551$

ha $\tilde{p} = \tilde{p}$

Chi vince? <u>Arrotondamento</u>

Infatti

$$a = \pm p N^q$$

$$\tilde{a} = \pm \tilde{p} N^q$$

<u>NB</u> Usando t cifre per la rappresentazione della mantissa se p_1 e p_2 sono due mantisse consecutive

allora

$$|p_1 - p_2| < N^{-t}$$

Poi $\quad p_1 < p < p_2$

per cui $\quad |p - p_1| < N^{-t}, \; |p - p_2| < N^{-t}$

(a) errore di troncamento

$$|a-\tilde{a}| = |p-\tilde{p}|N^q < N^{-t}N^q = N^{q-t}$$

(b) errore di arrotondamento

$$|a-\tilde{a}| = |p-\tilde{p}|N^q \leq \frac{1}{2}N^{q-t}$$

$\hookrightarrow$ errore di arrotondamento è da preferirsi

Errori relativi

(a)

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} < N^{1-t}$$

$$N^{q-1} \leq |a| < N^q \qquad \text{perché } \frac{1}{N} \leq |a| < 1$$

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} < \frac{N^{q-t}}{N^{q-1}} = N^{1-t}$$

(b)

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} \leq \frac{1}{2}N^{1-t}$$

PRECISIONE MACCHINA

$$eps = \frac{1}{2}N^{1-t}$$ (epsilon macchina)

In MATLAB esiste una variabile predefinita che si chiama eps

$$eps = 2.2204e-16$$

$$eps = 2.2204 \cdot 10^{-16} \simeq 2^{-52}$$

(1) ERRORE DI RAPPRESENTAZIONE, detto anche errore inerente o ineliminabile

(2) CANCELLAZIONE NUMERICA

$$x = 2.15 \cdot 10^{12} \qquad y = 1.25 \cdot 10^{-5}$$

mantissa con $t=3$ cifre

$$y = 0.\underbrace{0 \text{———}}_{16} 125 \cdot 10^{12}$$

$$x - y = (2.15 - 0.0\ldots\ldots0125)\,10^{12}$$
$$= 2.15 \cdot 10^{12}$$

La cancellazione numerica è una perdita di cifre significative

---

$$f(x) = x^2+1$$

$$f = @(x)\ x.\hat{}2 + 1$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad x.\hat{}2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$$

Come evitare la cancellazione numerica?

Tramite formule più <u>stabili</u>

<u>Nell' esempio</u>

$$p(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$$

$$p_1(x) = (x-1)^7$$

p_1 è una formula più stabile per valutare il polinomio vicino allo zero (o per valori piccoli)

<u>Altro esempio</u>

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \qquad f(y) = \frac{y-1}{\log y}$$

voglio valutare f in un punto x_0

ALG 1

```
if x0 == 0
    f = 1;
else
    f = (exp(x0)-1)/x0;
end
```

ALG 2

```
y = exp(x0);
if y == 1
    f = 1
else
    f = (y-1)/log(y)
end
```

X0	ALG 1	ALG 2
10^{-5}	1.000005	1.000005
10^{-6}	⋮	⋮
⋮		
10^{-16}	0	1

$$f_1(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2} \qquad f_2(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2}$$

$$t = 1.2e-10$$

Sappiamo $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{2t} = \frac{1}{2}$$

<u>Def</u> Un metodo numerico si dice STABILE se non propaga gli errori. Altrimenti si dice INSTABILE

- La stabilità è legata al metodo risolutivo (algoritmo)
- La cancellazione numerica è fonte di

instabilità

ERRORE INERENTE + ERRORE ALGORITMICO

ineliminabile

possiamo trovare formule + stabili

Esempio

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{se } a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dove si manifesta l'instabilità nel calcolo di x_1, x_2?

(i) in x_1 quando $\sqrt{b^2-4ac} \simeq b$

(ii) in x_2 quando $-\sqrt{b^2-4ac} \simeq b$

Come ovviare alla cancellazione?

Ricordo che $x_1+x_2=-b/a$

$x_1 x_2 = c/a \leftarrow$

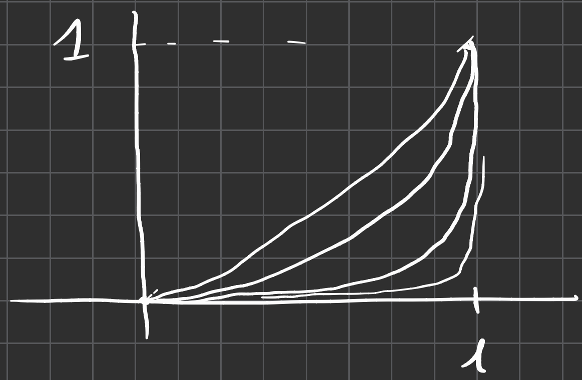
(i) Si calcola prima x_2 dove non sussiste il problema e poi $x_1 = c/(a x_2)$

(ii) Analogamente si calcola prima x_1 e poi

$$x_2 = c/(a x_1)$$

Esempio (più interessante)

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x \, dx \qquad n \geq 0$$



$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$$

FORMULA INSTABILE

$$I_0 = 1 - \frac{1}{e} \qquad (\times \text{ parti})$$

$$I_1 = \frac{1}{e}\left(e - (e-1)\right) = \frac{1}{e}$$

$$\boxed{I_{n+1} = 1 - (n+1) I_n \qquad n \geq 0}$$

FORMULA STABILE

Si ottiene osservando $x^n e^x > 0 \quad x \in [0,1]$

ovvero $I_n > 0$

poi $I_{n+1} < I_n$

Allora sapendo che è una successione convergente verso 0, si può partire da

$$I_N = 10^{-4}$$

$$\boxed{I_n = \frac{1 - I_{n+1}}{n+1} \qquad n = N, N-1, \dots, 0}$$

CONDIZIONAMENTO di un problema numerico

Def Un problema si dice BEN CONDIZIONATO se a piccole perturbazioni sui dati del problema corrispondono piccole perturbazioni sui risultati

In caso contrario è MAL CONDIZIONATO

Nota: well-posed, ill-conditioned

Come si misura il condizionamento di un problema?

Mediante il NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

$$C = r/d$$

r = errore relativo sul risultato

d = " " sul dato

Nei problemi ben condizionati C deve essere "piccolo"

__Esempio__

Si voglia risolvere $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1001 & 1000 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2001 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dati del problema sono: $A, \bar{b}$

Consideriamo $A_1 = A + \underbrace{\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice di perturbazione}}$

Risolvendo $\quad A_1 \bar{x} = \bar{b}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 1901/900 \end{pmatrix}$$

mi aspetto che il problema sia mal condizionato

Possiamo determinare il condizionamento relativo a ciascuna componente del vettore soluzione

$$C_x = \left(\frac{r}{d}\right)_x = \frac{\left(1 - (-1/9)\right)/1}{10^{-2}} = 1.\bar{1}\,10^2$$

$$C_y = \left(\frac{r}{d}\right)_y = \frac{\left(1 - (1901/900)\right)/1}{10^{-2}} = -1.\bar{1}\,10^2$$

Un errore di 10^{-2} si è amplificato in 10^2 $\Rightarrow$ il problema è MAL CONDIZIONATO

ALTRO ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e la si voglia valutare in x_0

Perturbo x_0 di h $\quad x_0 + h$

Le quantità richieste per calcolare il condizionamento sono

$$d = \frac{x_0 + h - x_0}{x_0} = \frac{h}{x_0}$$

$$r = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0)}$$

$$C = \frac{r}{d} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0)} \frac{x_0}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

C dipende da h ed f

se f è derivabile

$$\lim_{h \to 0} |C(h,f)| = \Bigg| \underbrace{f'(x_0) \frac{x_0}{f(x_0)}}_{\text{FATTORE DI AMPLIFICAZIONE DELL' ERRORE}} \Bigg|$$

se $|C(h,f)| < 1 \Longrightarrow$ problema ben condizionato

<u>Esempio</u>

$$f_a(x) = e^{ax^2} \quad a > 0$$

$$|C(f_a, x)| = \left| \frac{2ax^2 \cancel{e^{ax^2}}}{\cancel{e^{ax^2}}} \right| = 2ax^2$$

Se $\underline{\underline{a = 5}}$ $x = 5$

$$|C(f_5, 5)| = 250$$ MALCONDIZ.

Se prendo a

$$C = r/d$$

$$a + \underbrace{\delta a}_{0.3} = 5.3$$

$$d = \frac{\delta a}{a} = \frac{5.3}{5} = 0.06$$

$$r = \left| \frac{f_{a+\delta a}(5) - f_a(5)}{f_a(5)} \right| \simeq 1.8 \cdot 10^3$$

Un errore di $6 \cdot 10^{-2}$ viene amplificato

$$C = r/d \simeq 3 \cdot 10^4$$

$\Longrightarrow$ MALCONDIZIONATO !