Le grandezze vettoriali

Le grandezze fisiche

Le grandezze fisiche possono essere

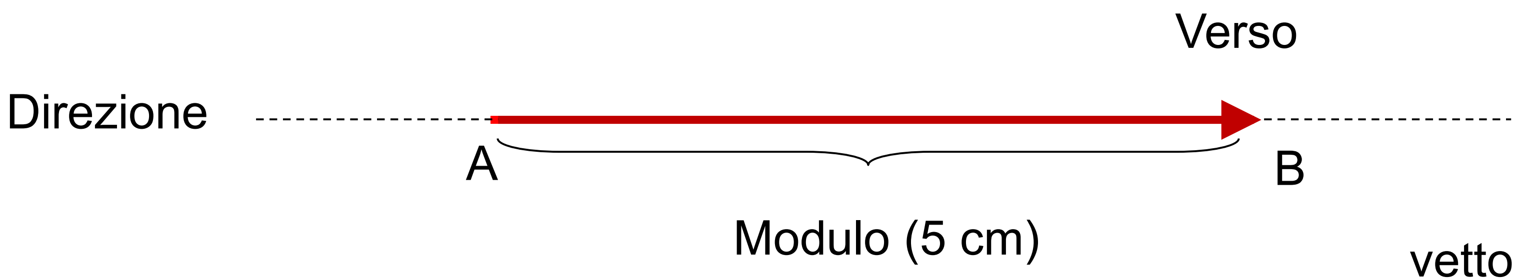
- Scalari: temperatura, massa, tempo
- Vettoriali: velocità, accelerazione, forza

Le grandezze scalari sono rappresentate esaustivamente da un numero

….ho bevuto un litro di latte ….ho aspettato per dieci minuti il treno…

Le grandezze vettoriali hanno tre caratteristiche : modulo, direzione e verso

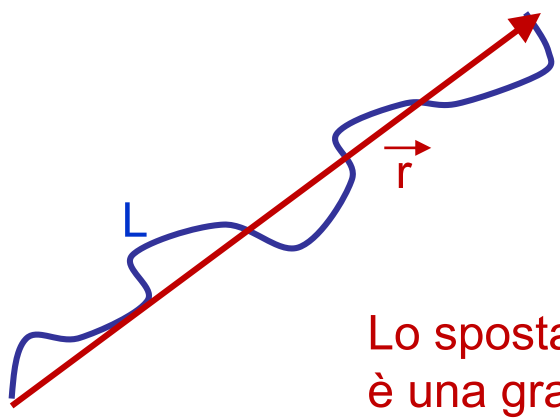
…mi sono spostato dal punto A al punto B verso destra di 5 centimetri…



vettore $\overrightarrow{AB}$

I vettori

Un'automobile sale su una strada di montagna



La lunghezza (L) del cammino percorso è una grandezza scalare

Lo spostamento $\vec{r}$ dell'auto è una grandezza vettoriale

I vettori in fisica sono applicati in un punto.
Esiste un numero infinito di vettori equipollenti, cioè con modulo, direzione e verso uguali, ma applicati in punti diversi.

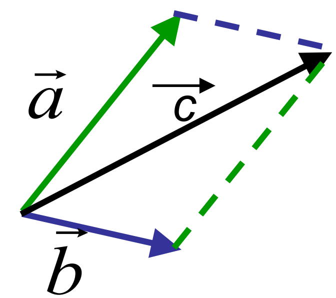
Operazioni di base

Università degli Studi di Padova

In algebra viene definita l'operazione di somma vettoriale che gode della proprietà commutativa e associativa e per cui è definito un elemento neutro che è il vettore di modulo nullo.

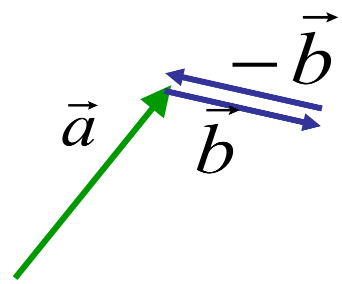
Somma vettoriale

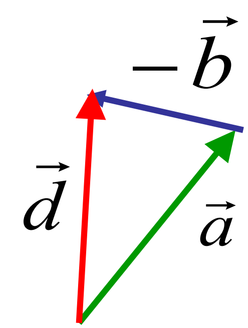
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Differenza vettoriale

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = a + (-\vec{b}\,)$$





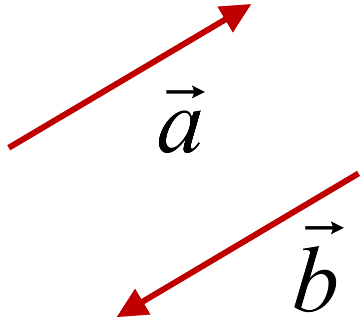
Operazioni di base

Prodotto di un vettore per uno scalare

$$\vec{b} = m\vec{a}$$

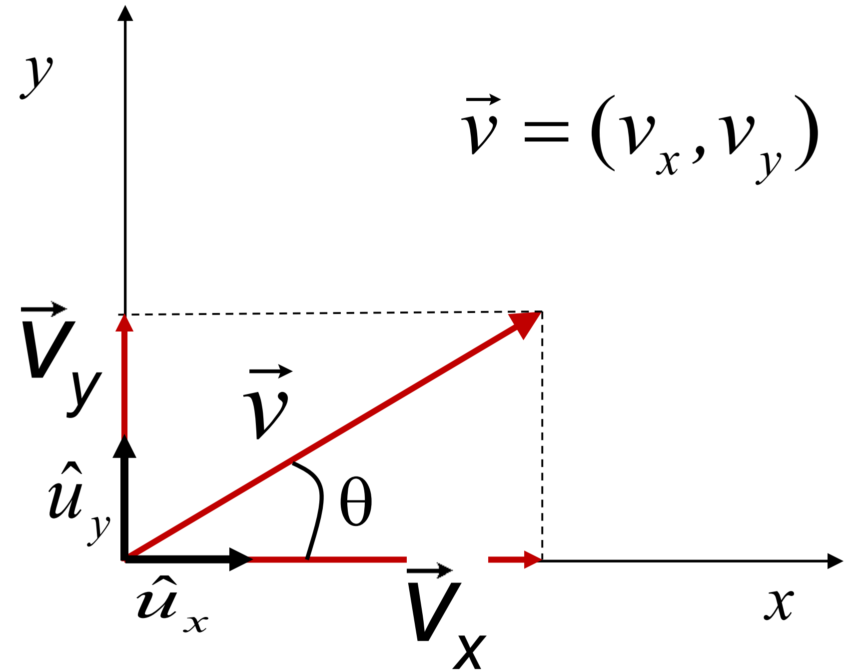
Vettore opposto

$$m = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = -\vec{a}$$



Rappresentazione cartesiana

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$$



$\vec{v}_{x,y}$ vettori componenti rispetto agli assi

$\hat{u}_{x,y}$ versori: vettori di modulo unitario

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$ modulo

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_y}{v_x}$$ direzione e verso

Esempi

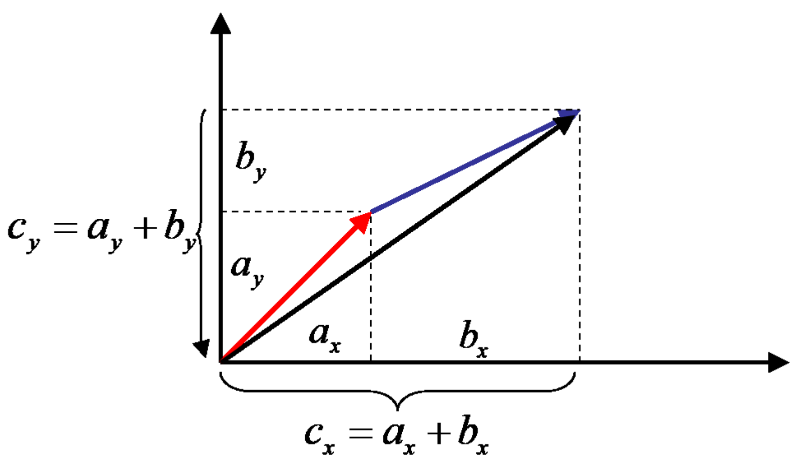
A questo link trovate un’applicazione che vi consente di familiarizzare con i vettori in una e più dimensioni:

https://phet.colorado.edu/it/simulation/vector-addition

Somma di due vettori nel piano cartesiano

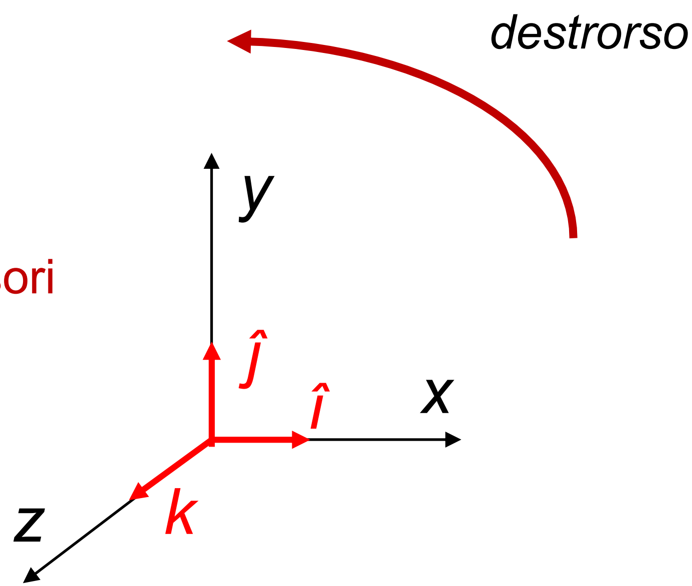
$$\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y \qquad \vec{b} = b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y$$

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{u}_x + (a_y + b_y)\hat{u}_y}$$



Vettori nello spazio

Sistema cartesiano destrorso

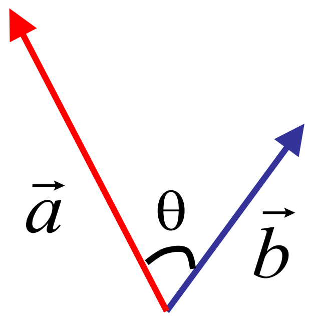


$\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ oppure *i , j, k* sono versori

$$\vec{v} = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z = (v_x, v_y, v_z)$$ generico vettore

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$ modulo

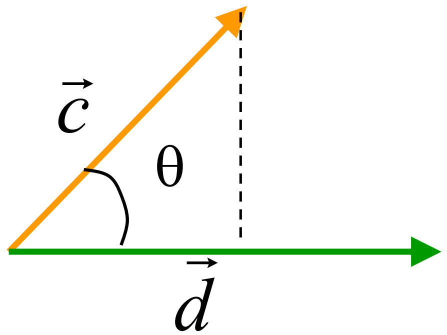
Prodotto scalare



$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\theta$$ **grandezza scalare**

In termini delle componenti dei due vettori si calcola come:

$$s = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



Il prodotto scalare tra due vettori è uguale al prodotto del modulo del primo vettore per la proiezione del secondo vettore sul primo.

Prodotto scalare

Università degli Studi di Padova

- **Il prodotto scalare è nullo se uno dei vettori è nullo e se i due vettori sono perpendicolari**

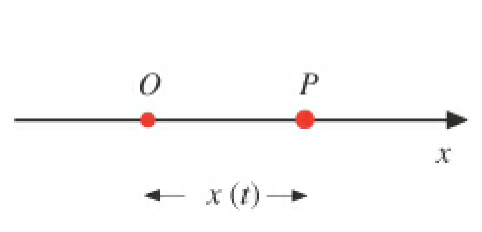
- Per il prodotto scalare tra vettori vale la proprietà commutativa

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=a\,b\cos\theta$$

- Il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato del modulo

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^{2}=a^{2}$$

Moto rettilineo



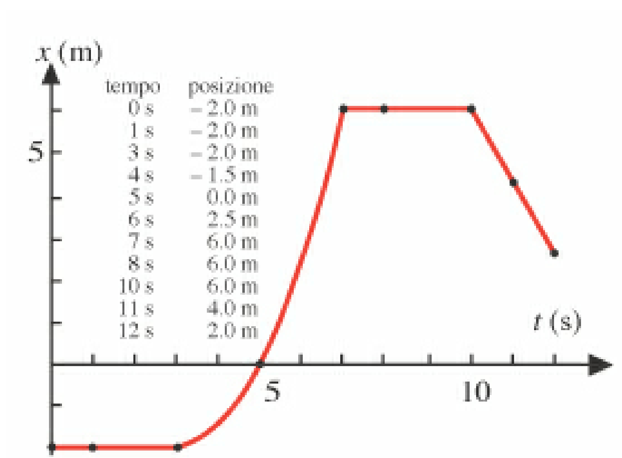
La traiettoria più semplice: un segmento di retta

Il sistema di riferimento è una retta orientata
(dipende dal problema specifico)

Legge oraria $x(t)$

- direzione
- verso
- origine O (fissata arbitrariamente)

Diagramma orario: è il grafico della funzione *x*(t): come varia *x* in funzione del tempo. La particella (punto materiale) si muove lungo *x*.



La velocità

Vogliamo determinare quantitativamente la **"rapidità"** dello spostamento.

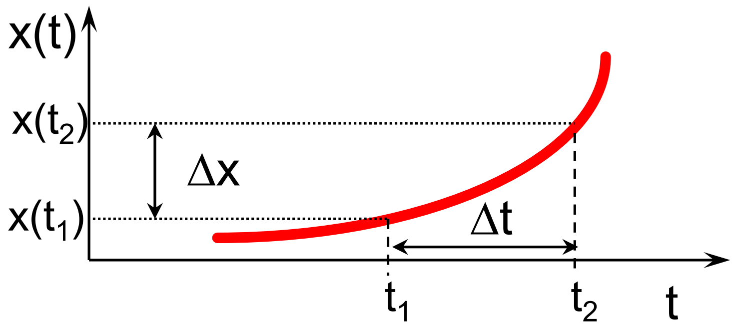
Definiamo la **velocità** media:

(Dà informazione globale senza dettagli del moto)

$$t = t_1 \Leftrightarrow x = x_1$$

$$t = t_2 \Leftrightarrow x = x_2$$

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Es: se parte da x_1 e poi vi ritorna, allora $v_m = 0$ ma il corpo si è mosso !!!

Unità di misura: [v]=[x]/[t]=m/s (metro/secondo)

In generale, v_m dipende dall'intervallo di tempo Δt

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}, v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}, \cdots v_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 \neq v_2 \neq \cdots \neq v_n$$

Velocità istantanea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

velocità istantanea

La velocità è la DERIVATA della posizione rispetto al tempo

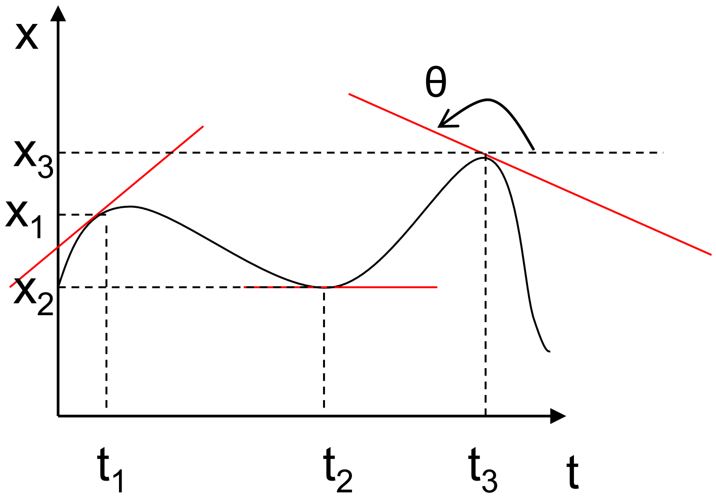
La velocità è una grandezza **finita** ottenuta dal rapporto di due quantità **infinitesime**

Se facciamo tendere **Δt** a zero, il rapporto **Δx/Δt** no dipende più da **Δt**, ma dall'istante in cui lo misuriamo:

la velocità cambia istante per istante!

L'esistenza di questo limite **finito** (indipendentemente dal tipo di moto!) è un fatto sperimentale ed implica che il moto DEVE essere continuo (e non a "salti")

Velocità istantanea



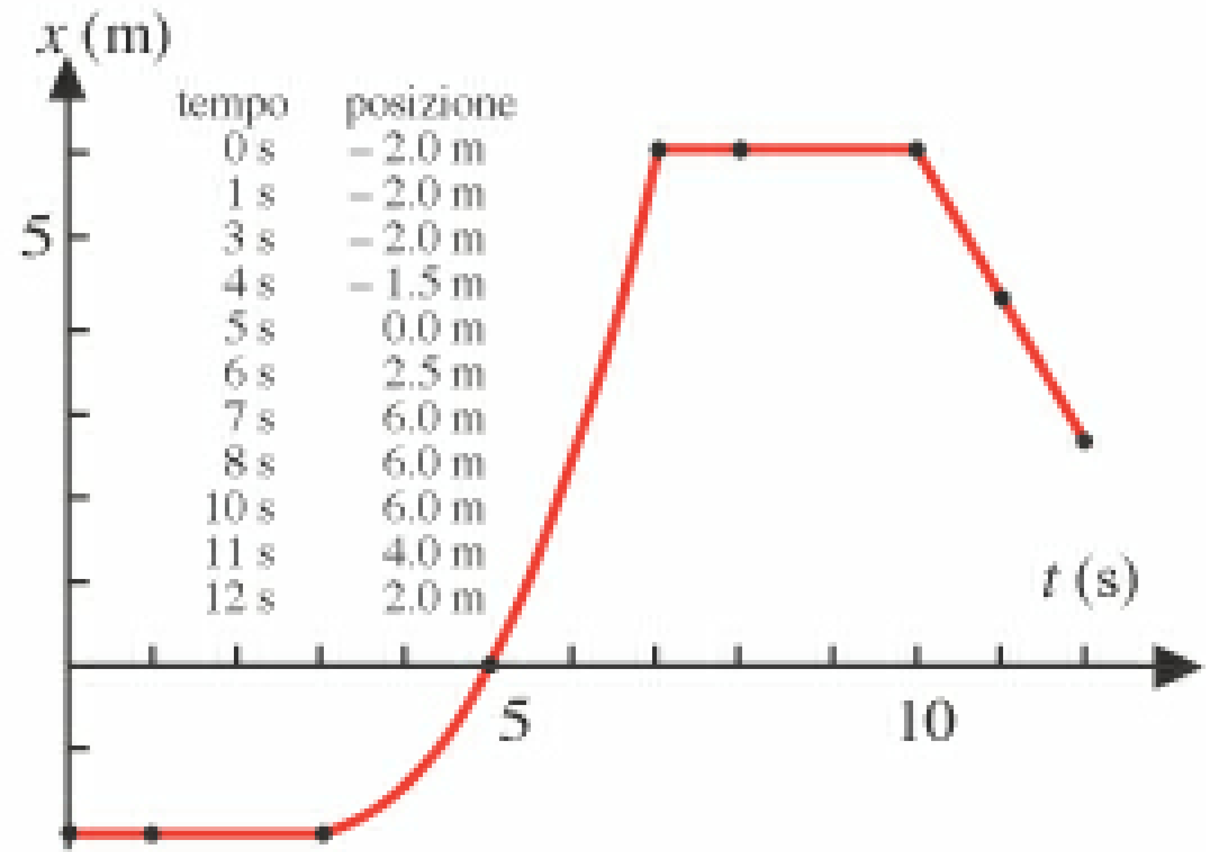
La velocità è proporzionale alla tangente dell'angolo che forma con l'asse x la retta tangente alla curva oraria nell'istante t_i

$$v(t_1) > 0$$
$$v(t_2) = 0$$
$$v(t_3) < 0$$

Il segno della velocità indica il verso del moto

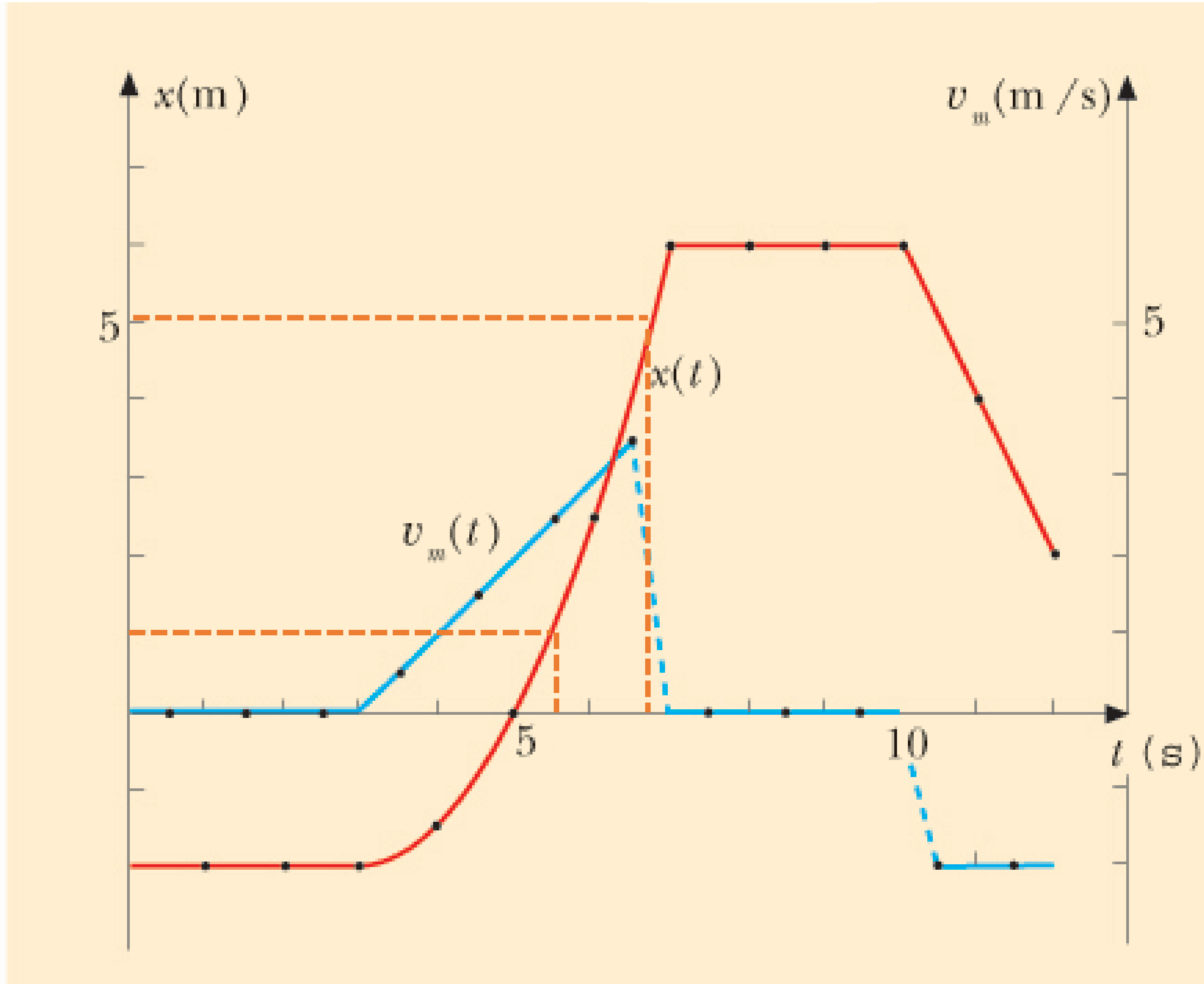
Se è nota x(t) è sempre possibile calcolare v(t) tramite derivazione

Moto rettilineo



Calcolo della velocità

t (s)	x (m)	v_m (m/s)
0	–2	
3	–2	0
4	–1.5	0.5
5	0	1.5
6	2.5	2.5
7	6	3.5
10	6	0
11	4	–2
12	2	–2



Problema inverso

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Nota v(t) è possibile calcolare x(t)?

Lo spostamento è la somma di INFINITI contributi INFINITESIMALI:

$$\boxed{dx = v(t)\, dt}$$

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt = x - x_0$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt}$$

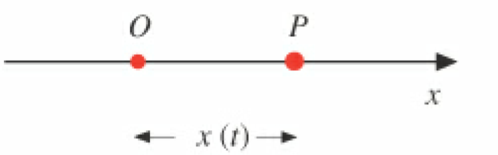
È fondamentale conoscere le condizioni iniziali (x_0 e t_0)

Nota x(t) → Derivata → v(t)

Nota v(t) → Integrale → x(t)

Moto rettilineo uniforme

Università degli Studi di Padova



$\boxed{v = \text{cost}}$

La velocità non cambia nel tempo

Legge oraria del moto rettilineo uniforme

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)}$$

- Lo spazio è funzione lineare del tempo
- In tempi uguali sono percorsi spazi uguali
- *x* cresce sempre o decresce sempre
- La velocità media coincide con la velocità istantanea

<u>Esempio:</u>