Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 21/1/2020

Esercizio 1 Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^{3/2}+x^{3/2}}.$$

i) (2pt) Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che $\log(1+t) \leq C_\varepsilon + t^\varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.

ii) (8pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: ii) La serie converge uniformemente per $x \in$

Esercizio 2 Dato un parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^\alpha\right)}{|x-y|} \qquad \text{se } x \neq y,$$

ed $f(x,y) = 0$ se $x = y$.

i) (6pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) (4pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) continua se $\alpha \in$; ii) differenziabile se $\alpha \in$

Esercizio 3 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 - 1 \\ y(0) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

i) (2pt) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

ii) (4pt) Studiare la monotonia della soluzione. Provare preliminarmente che $y(x) \geq \tan(\pi/3 - x)$ per $x \in [0,1]$ ed osservare che $y = -x$ risolve l'equazione differenziale.

iii) (3pt) Studiare la convessità della soluzione.

iv) (2pt) Tracciare un grafico della soluzione massimale.

v) (facoltativo) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy.

Risposte: iv) Grafico:

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^{3/2}+x^{3/2}} .$$

1) Provare preliminarmente che: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, c_\varepsilon > 0$ tale che $\log(1+t) \leq c_\varepsilon + t^\varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.

2) Studiare la convergenza uniforme della serie $(*)$

Risoluzione. 1) Sappiamo che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log(1+t)}{t^\varepsilon} \overset{H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+t)\,\varepsilon\, t^{\varepsilon-1}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{(1+t)\, t^\varepsilon} = 0$$

Dunque esiste $M_\varepsilon > 0$ tale che $\log(1+t) \leq t^\varepsilon$ per $t \geq M_\varepsilon$.

Detto $c_\varepsilon = \max\limits_{0 \leq t \leq M_\varepsilon} \log(1+t) > 0$ si trova la stima cercata.

2) Usando il punto 1) si stima

$$\frac{\log(1+nx)}{n^{3/2}+x^{3/2}} \leq \frac{c_\varepsilon + (nx)^\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}}$$

dove $\varepsilon > 0$ è da scegliere con cura.

Certamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}} \overset{\forall x \geq 0}{\leq} c_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Dunque questa serie converge unif su $[0,\infty)$ per il crit. Weierstraß.

Studiamo la convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}} .$$

Voglio "collegare" $n \cdot x$ con il denominatore.
Abbiamo $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Scegliamo $a = n^{3/4}$ e $b = x^{3/4}$. In questo modo:

$$(nx)^{\frac{3}{4}} = n^{\frac{3}{4}} x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2}\left(n^{3/2}+x^{3/2}\right)$$

e quindi

$$(nx)^\varepsilon \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4\varepsilon}{3}}}_{= D_\varepsilon} \left(n^{3/2}+x^{3/2}\right)^{\frac{4\varepsilon}{3}}$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} D_\varepsilon \frac{1}{(n^{3/2}+x^{3/2})^{1-4\varepsilon/3}} \leq \boxed{\text{se } 1-\frac{4\varepsilon}{3} > 0}$$

$$\leq D_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}(1-4\varepsilon/3)}}$$

Ora scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo tale che

$$\frac{3}{2}\left(1 - \frac{4\varepsilon}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

ovvero $\varepsilon = \frac{1}{12}$. Concretamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^{\frac{1}{12}}}{n^{3/2} + x^{3/2}} \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < \infty$$

Conclusione: La serie data converge uniformemente su tutto $[0, \infty)$

ESERCIZIO Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 - 1 \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$.

2) Studiare la monotonia della soluzione. Provare preliminarmente che $y(x) \geq tg\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ per $x \in [0, 1)$ e osservare che la retta $y = -x$ risolve l'eq. diff.

3) Studiare la convessità della soluzione

4) Tracciare un grafico della soluzione massimale

5) Facoltativo : Calcolare la soluzione.

Risoluzione 1) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ è in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz esiste un'unica soluzione locale

2) Abbiamo $y' = x^2 - y^2 - 1 \geq -y^2 - 1$ e dunque

$$\frac{y'}{y^2+1} \geq -1 .$$

Integrando su $[0, x]$:

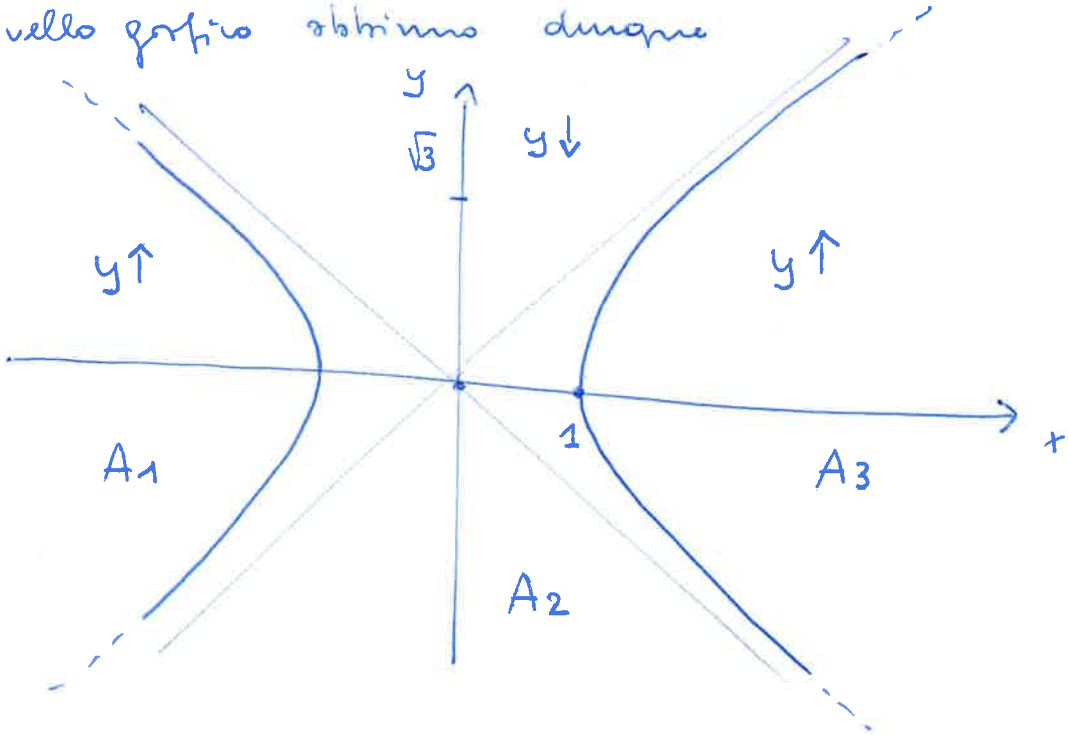
$$\underbrace{\operatorname{arctg} y(x) - \operatorname{arctg} \overset{\sqrt{3}}{\overset{\shortparallel}{y(0)}}}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{\pi}{3}}} = \int_0^x \frac{y'}{y^2+1}\, dt \geq -\int_0^x 1\, dt = -x$$

e quindi $\operatorname{arctg} y(x) \geq \frac{\pi}{3} - x$ e invertendo si trova la tesi

3) Abbiamo $f(x,y) < 0 \iff x^2 - y^2 - 1 < 0$

$$\iff x^2 < 1 + y^2$$

A livello grafico abbiamo dunque



Dunque, intorno al punto $(0, \sqrt{3}) \in A_2$ la soluzione decresce.

Siccome $y(1) \geq tg\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) > 0$, deduciamo che la soluzione deve entrare nella regione A_3, dove y inizia a crescere.

Dalla regione A_3 y non può più uscire e quindi y continua a crescere per sempre.

Dai criteri di prolungamento noti deduciamo che $b = +\infty$ al punto 4), con b = estremo destro massimale.

Osservo che la funzione $y = -x$ risolve l'equazione differenziale $y' = x^2 - y^2 - 1$. Per l'unicità della soluzione deduco che la mia soluzione $y(x)$ non può toccare la retta $y = -x$.

Quindi la soluzione $y(x)$ non può entrare nella regione A_1. Quindi per $x \leq 0$ la soluzione è decrescente.

~~4) $b = +\infty$ è già provato. Supponiamo che y sia definita su $[-1, 0]$. (Altrimenti è $a \geq -1$). Certamente $y(-1) \geq \sqrt{3}$.~~

3) Abbiamo

$$y'' = 2x - 2yy' = 2\left[x - y\left(x^2 - y^2 - 1\right)\right]$$

$$= 2\left[x + y - y\left(x^2 - y^2\right)\right] = 2(x+y)\left[1 - y(x-y)\right]$$

Sappiamo che $x + y > 0$. Dunque

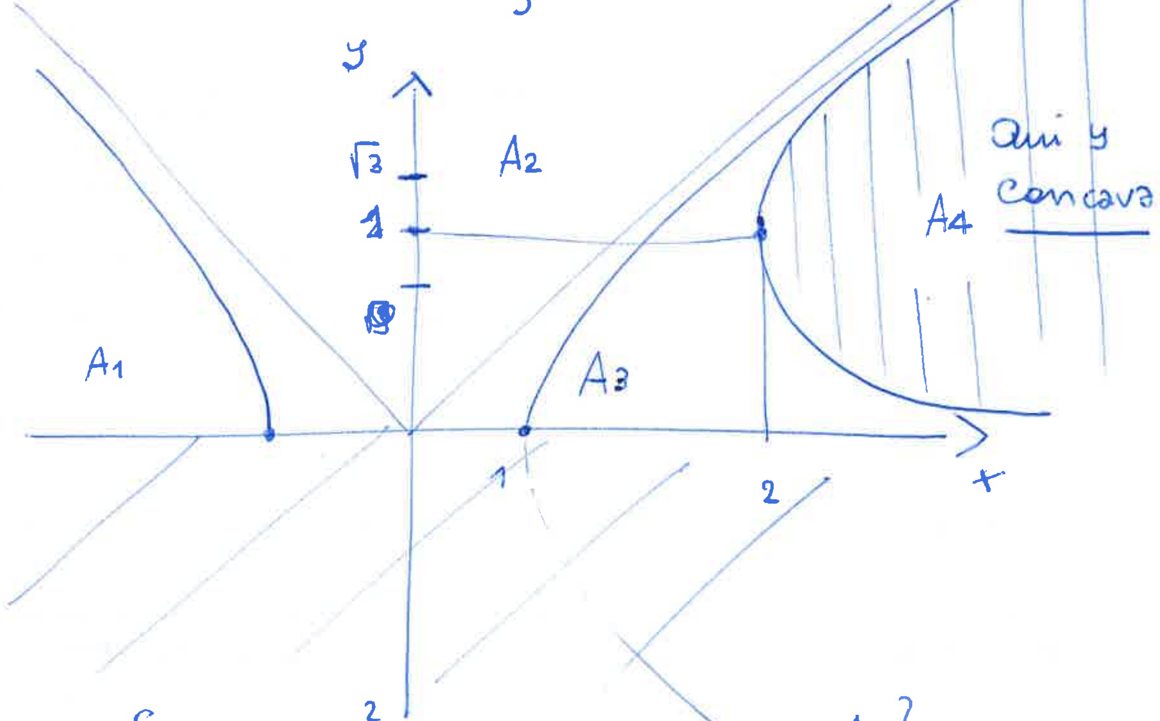
$$y'' > 0 \iff 1 - y(x-y) > 0$$

$$\iff 1 + y^2 > yx$$

Sappiamo dalla discussione sulla monotonia che $y > 0$

Dunque

$$y'' > 0 \iff x < y + \frac{1}{y}$$



Sia $A_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \text{ e } x > y + \frac{1}{y} \right\} \subset A_3$.

La soluzione deve entrare in A_4.

Nella regione A_4 la soluzione è concava.
Fuori da A_4 è convessa.

4) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. La discussione precedente mostra che $b = +\infty$.

Proviamo che $a > -\infty$ (Non era richiesto nel compito).
Siccome y è convessa in tutta A_2, per $x \leq 0$ si ha $y(x) \geq -4x + \sqrt{3}$ (Retta tangente al grafico in $x=0$).
In particolare si ha $y(x) \geq -4x$ e quindi $y(x)^2 \geq 16x^2$.
Dunque
$$y' = x^2 - y^2 - 1 \leq \frac{1}{16} y^2 - y^2 - 1 = -\frac{15}{16} y^2 - 1$$
da cui
$$= \int_x^0 \frac{y'}{\frac{15}{16} y^2 + 1} dt \leq -\int_x^0 dt = x$$
$$= \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} y \right) \right]_x^0 = \frac{4}{\sqrt{15}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \sqrt{3} \right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} y(x) \right) \right]$$

Si trova la stima

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\, y(x)\right) \geq -\frac{\sqrt{15}}{4}\, x + \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$$

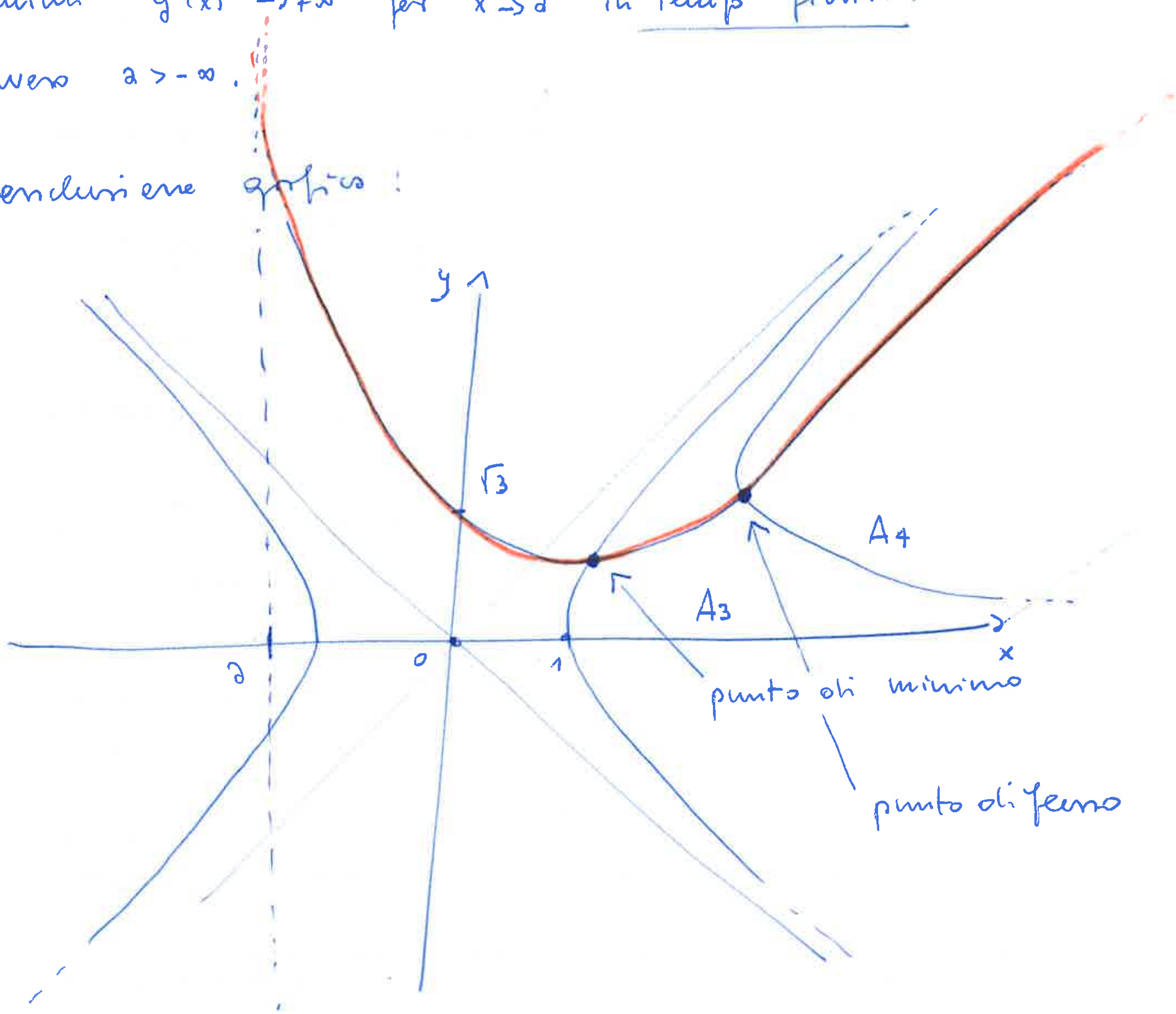
e infine

$$\frac{\sqrt{15}}{4}\, y(x) \geq \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right) - \frac{\sqrt{15}}{4}\, x\right)$$

Quindi $y(x) \to +\infty$ per $x \to a^+$ in tempo finito.

Ovvero $a > -\infty$.

Conclusione grafica:



Non abbiamo provato che la soluzione rimane dentro A_4 per sempre.

5) Con la sostituzione $y = z - x$ si ha $y' = z' - 1$

e l'eq. diff. diventa

$$z' - 1 = y' = x^2 - y^2 - 1 = x^2 - (z - x)^2 - 1$$

ovvero $z' = -z^2 + 2zx$. É di Bernoulli.

Altra sostituzione $z = w^\alpha$ con $z' = \alpha w^{\alpha-1} w'$

e quindi

$$\alpha w^{\alpha-1} w' = -w^{2\alpha} + 2 w^\alpha x$$

$$\alpha w' = -w^{\alpha+1} + 2 w x$$

Con la scelta $\alpha = -1$ diventa lineare e precisamente

$$-w' = -1 + 2wx \quad (=) \quad w' = -2wx + 1$$

La soluzione di $w' = -2x w$ è $w(x) = ce^{-x^2}$

Con la variazione della costante $c = c(x)$:

$w' = c' e^{-x^2} + c(-2x) e^{-x^2}$. Dunque $w' = -2wx + 1$

diventa

$$c' e^{-x^2} - 2x \cancel{c} e^{-x^2} = -2\cancel{x e^{-x^2}} + 1$$

da cui $c(x) = c_0 + \int_0^x e^{t^2} dt$, $c_0 \in \mathbb{R}$.

Si trova allora

$$z = w(x)^{-1} = \left[e^{-x^2} \left(c_0 + \int_0^x e^{t^2} dt \right) \right]^{-1}$$

e infine

$$y(x) = -x + \frac{e^{x^2}}{c_0 + \int_0^x e^{t^2}\,dt} .$$

Per $x = 0$

$$\sqrt{3} = y(0) = \frac{1}{c_0} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Abbiamo scoperto che $a < 0$ è esattamente la soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \int_0^a e^{t^2}\,dt = 0 .$$

$\square$

Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 13/2/2020

Esercizio 1 Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x^2 n + 1}.$$

i) (2pt) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente.

ii) (6pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) (2pt) Stabilire se c'è convergenza uniforme su $[-1, 1]$.

Risposte: i) converge punt. per $x \in$ ii) converge unif. per $x \in$

Esercizio 2 Sia $C([0,1])$ lo spazio delle funzioni continue su $[0,1] \subset \mathbb{R}$ munito della norma del sup $\|\cdot\|_\infty$ e sia $X = \{f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \le 1\}$ la palla unitaria chiusa. Sia poi $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ l'applicazione

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad x \in [0,1],$$

e definiamo l'insieme di funzioni $Y = T(X) \subset C([0,1])$.

i) (2pt) Dire se Y è equilimitato.

ii) (3pt) Provare che per ogni $f \in X$ si ha

$$|Tf(x) - Tf(y)| \le 2\sqrt{|x-y|}.$$

iii) (3pt) Dire se $\bar{Y}$, la chiusura di Y, è compatto in $C([0,1])$.

iv) (2pt) Stabilire se Y è compatto.

Risposte: i) equilim. si/no: ; iii) $\bar{Y}$ compatto: ; ii) Y compatto:

Esercizio 3 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^x - y}{e^x + y} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

i) (2pt) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

ii) (3pt) Studiare la monotonia della soluzione.

iii) (3pt) Studiare la convessità della soluzione.

iv) (2pt) Provare che la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$ e tracciarne un grafico.

v) (facoltativo) Studiare l'esistenza di asintoti a $\pm\infty$.

Risposte: iv) Grafico:

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x^2 n + 1}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione i) Per $x=0$ la serie converge con somma 0.
Sia $x \neq 0$. Usando $|\sin t| \le |t|$ si trova:

$$\left| \frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x^2 n + 1} \right| \le \frac{|x|}{\sqrt{n}\,(x^2 n+1)} = \frac{|x|}{\sqrt{n}\; x^2 \left(n + \frac{1}{x^2}\right)} \le$$

$$\le \frac{1}{|x|\; n^{3/2}}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ deduciamo che la serie converge (assolutamente) per ogni $x \neq 0$.

Conclusione: Convergenza puntuale per $x \in \mathbb{R}$.

ii) Sia $\delta > 0$. Dai conti precedenti segue che

$$\sup_{|x| \ge \delta} \left| \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{x^2 n + 1} \right| \le \frac{1}{\delta}\, \frac{1}{n^{3/2}}$$

Per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $\{|x| \ge \delta\}$ per ogni $\delta > 0$.
Adesso proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0,1]$.

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{x^2 n + 1} .$$

Sappiamo che $f(0) = 0$. Proveremo che f non è continua in $x=0$. Questo dimostrerà che la serie non converge uniformemente su $[0,1]$.

Fissiamo $x \in (0,1]$. La funzione $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$g(t) = \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{x^2 t + 1}, \qquad t > 0,$$

è certamente decrescente per $t > 1$. Dunque

$$t \in [n, n+1) \implies g(t) \leq g(n).$$

Quindi possiamo confrontare serie ed integrale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{x^2 n + 1}}_{= g(n)} \geq \int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{x^2 t + 1} \, dt \overset{t = \frac{1}{x^2} s}{=}$$

$$= \int_{x^2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{s}}\right)}{s+1} \frac{1}{x^2} \, ds \overset{\substack{\text{per } t \in [0,1] \\ \sin t \geq \frac{t}{2}}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}\,(s+1)} \, ds .$$

Deduciamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}\,(s+1)}\, ds > 0 .$$

se esiste..

Quindi f non è continua in 0.

$\square$

ESERCIZIO Sia $C([0,1])$ con la norma del sup e sia $X = \{ f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1 \}$. Sia poi

$T : C([0,1]) \to C([0,1])$

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt, \qquad x \in [0,1],$$

e definiamo $Y = T(X) \subset C([0,1])$.

i) Dire se Y è equilimitato.

ii) Dire se Y è ~~con~~ ~~equilimitato~~ equicontinuo.

iii) Dire se $\overline{Y}$ è compatto.

iv) Dire se Y è compatto.

Risoluzione i)

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\, dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} =$$

$$\overset{0 \leq x \leq 1}{=} \|f\|_\infty \cdot 2\sqrt{x} \leq 2\|f\|_\infty$$

Quindi $\|Tf\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \leq 2$ se $f \in X$.

Dunque Y è equilimitato

ii) Sia $f \in X$. Allora

$$|Tf(x) - Tf(y)| = \left| \int_y^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq$$

$$\overset{0 \leq y < x \leq 1}{\leq} \int_y^x \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\, dt \leq \|f\|_\infty\, 2(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

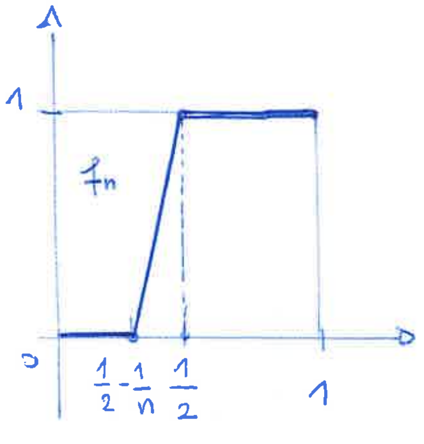
Dunque per ogni $x, y \in [0,1]$

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq 2\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = 2\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq 2\sqrt{|x-y|}$$

Dalla stima segue che Y è equicontinuo.

iii) $\overline{Y}$ è chiuso, equicontinuo ed equilimitato. Infatti equicontinuità e limitatezza passano alla chiusura. Dunque $\overline{Y}$ è compatto per il Teorema di Ascoli - Arzelà.

iv) Y non è compatto perché non è chiuso. Siano $f_n : [0,1] \to [0,1]$ le funzioni (continue) in figura:



Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left.\begin{cases} 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \end{cases}\right\} := f_\infty(x)$$

Chiaramente f_∞ non è continua.

É facile vedere che

$$T(f_n) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} T(f_\infty) \quad \text{uniformemente su } [0,1]$$

Quindi $T(f_\infty) \in \overline{Y}$, per la caratterizzazione sequenziale della chiusura. Tuttavia $T(f_\infty) \notin Y$ perché f_∞ non è continua (non è un elemento di X).

Proviamo la convergenza uniforme sopra:

$$\left| T(f_n)(x) - T(f_\infty)(x) \right| = \left| \int_0^x \frac{f_n(t) - f_\infty(t)}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{|f_n(t) - f_\infty(t)|}{\sqrt{t}}\, dt = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(t)}{\sqrt{t}}\, dt \leq$$

$$\leq \int_{1/2-1/n}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

indipendentemente da $x \in [0,1]$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^x - y}{e^x + y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

i) Provare che esiste un'unica soluzione locale

ii) Studiare la monotonia

iii) Studiare la convessità

iv) Disegnare il grafico della soluzione massimale

v) Calcolare eventuali asintoti a $\pm\infty$.

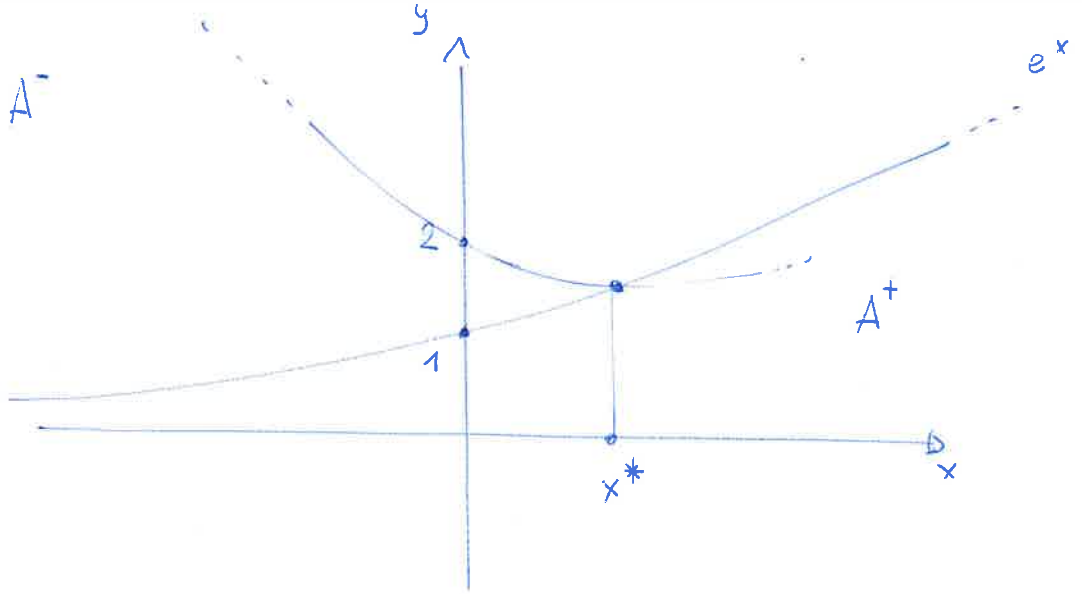
Risoluzione. i) La funzione $f(x,y) = \dfrac{e^x - y}{e^x + y}$ è definita per $y \neq -e^{+x}$. Tenuto conto della condizione iniziale, consideriamo

$$A = \{ (x,y) \; : \; y > -e^x \}.$$

Chiaramente $f \in C^\infty(A)$ e quindi è loc. di Lipschitz. Dalla teoria segue che esiste $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, soluzione unica del problema di Cauchy.

ii) Limitatamente a $e^x + y > 0$, si ha:

$$f(x,y) > 0 \iff e^x - y > 0 \iff y < e^x$$



Quindi in $A^- = \{(x,y) \in A : \; y > e^x\}$ la soluzione decresce,

in $A^+ = \{(x,y) \in A : \; y < e^x\}$ la soluzione cresce.

Per $x = 0$ la soluzione è in A^- e quindi decresce.
Deduciamo che la soluzione decresce per ogni $x < 0$.
Inoltre deve entrare in A^+ (esiste $x^* > 0$ tale che $y'(x^*) = 0$)
e non può più uscire da A^+. Quindi per $x > x^*$
la soluzione rimane crescente.

iii) Derivata seconda:

$$y'' = \frac{(e^x - y')(e^x + y) - (e^x - y)(e^x + y')}{(e^x + y)^2} = \frac{2e^x(y - y')}{(e^x + y)^2}$$

Dunque

$$y'' > 0 \iff y - y' > 0 \iff y - \frac{e^x - y}{e^x + y} > 0$$

$$\overset{e^x + y > 0}{\iff} \; ye^x + y^2 - e^x + y > 0$$

$$\boxed{\cancel{\iff -y^2 - (e^x + 1)y + e^x < 0}}$$

Questo implica che y non può sviluppare asintoti verticali in tempo finito.

Dunque la soluzione massimale è definita per $x \in \mathbb{R}$.

v) Abbiamo

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \frac{e^t - y(t)}{e^t + y(t)}\, dt =$$

$$= 2 + \int_0^x \left(1 - \frac{2y(t)}{e^t + y(t)}\right) dt$$

$$= 2 + x - 2\int_0^x \frac{y(t)}{e^t + y(t)}\, dt .$$

Osserviamo che l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{y(t)}{e^t + y(t)}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{y(t)}{e^t + y(t)}\, dt$$

converge in quanto $0 < y(t) < t + 2$ per $t > 0$.

Quindi $y = x + 2 - 2\int_0^\infty \frac{y(t)}{e^t + y(t)}\, dt$ è un asintoto per $x \to \infty$.

Analogamente:

$$y(x) \overset{x<0}{=} 2 + \int_0^x \frac{e^t - y(t)}{e^t + y(t)}\, dt = 2 - \int_x^0 \left(-1 + \frac{2e^t}{e^t + y(t)}\right) dt$$

$$= 2 - x - 2\int_x^0 \frac{e^t}{e^t + y(t)}\, dt$$

Ora osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

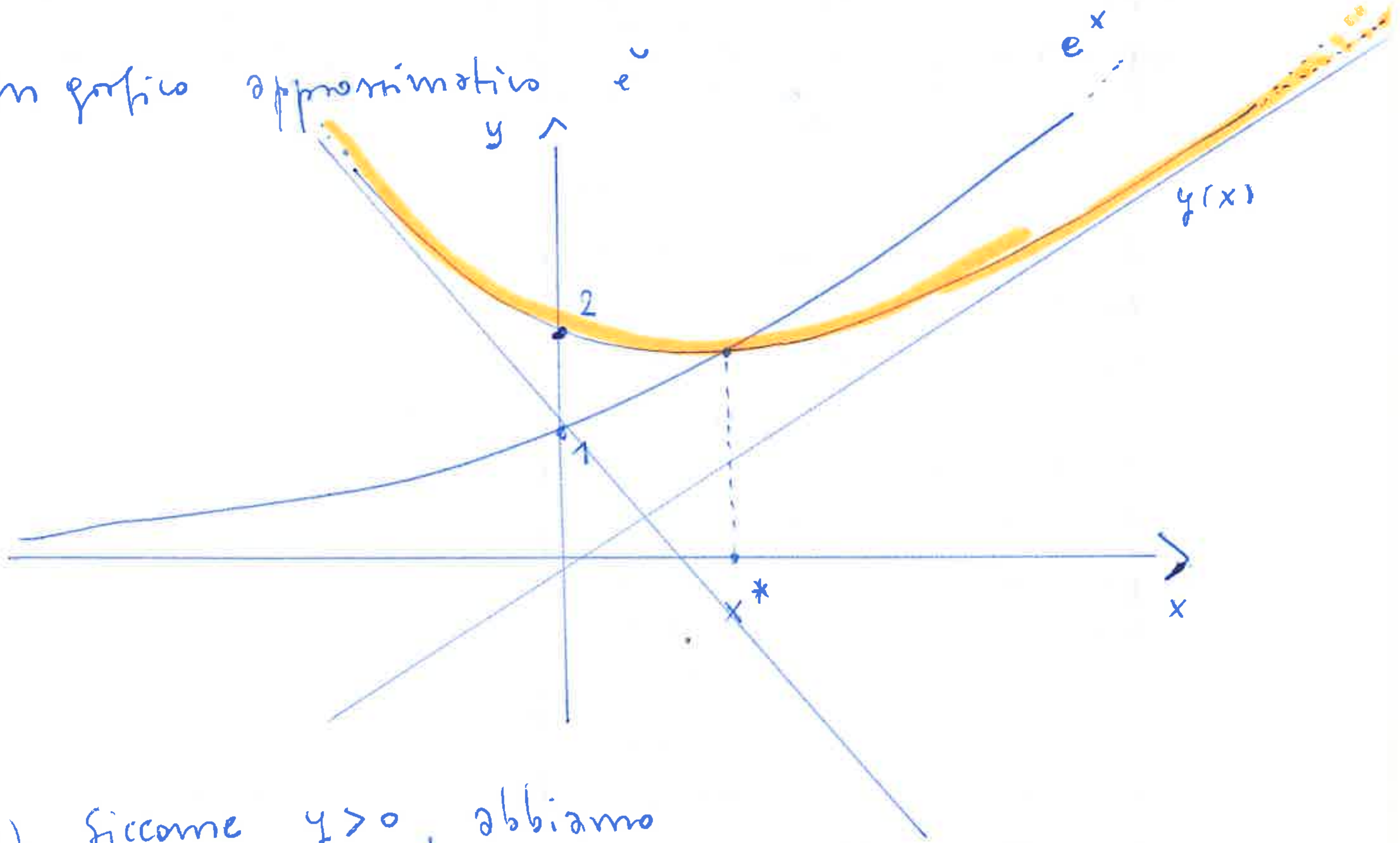
$$y(x) \geq y(x^*) = e^{x^*} > 1$$

Di conseguenza

$$y e^x + y^2 - e^x + y = \underbrace{e^x (y-1)}_{>0} + \underbrace{y^2 + y}_{>0} > 0 .$$

Quindi y è convessa (strettamente) su tutto $\mathbb{R}$.

Un grafico approssimativo è



iv) Siccome $y > 0$, abbiamo

$$|y'| = \left| \frac{e^x - y}{e^x + y} \right| = \frac{|e^x - y|}{e^x + y} \leq \frac{e^x + y}{e^x + y} = 1 .$$

con integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{e^t + y(t)}\,dt$ che converge.

Quindi

$$y = -x + 2 - 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{e^t + y(t)}\,dt$$

è un asintoto per $x \to -\infty$.

$\square$

Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: 26/6/2020 - Modalità telematica

INSTRUZIONI:

Spedire le soluzioni in bella copia manoscritta e controfirmata in ogni pagina come unico file pdf all'indirizzo monti@math.unipd.it entro le ore 10.40. Estensione del file:

`cognome_nome_matricola.pdf`

Il mancato rispetto di tali regole comporterà l'annullamento della prova.

Esercizio 1 Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \log\left(\dfrac{1+y^2}{1+x^2}\right) - 1 \\ y(0) = \sqrt{e-1}. \end{cases}$$

i) Disegnare un grafico motivato della soluzione massimale del problema.

ii) Detta y la soluzione massimale, provare che esistono e calcolare i seguenti limiti

$$L^{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x}.$$

Esercizio 2 Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{\sqrt{n} + nx^2}.$$

i) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[1, \infty)$.

ii) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[0, 1]$.

---

1 ora e 30 minuti a disposizione + 10 minuti per la consegna del file

Esercizio Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right) - 1 \\ y(0) = \sqrt{e-1} \end{cases}$$

1) Disegnare un grafico motivato della soluzione massimale.

2) Provare che esistono e calcolare i seguenti limiti

$$L^{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}.$$

Risoluzione. Abbiamo $f(x,y) = \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right) - 1$

che è $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dunque esiste unica la soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta,\delta)$ per qualche $\delta > 0$.

Osserviamo che $\log(1+y^2) \leq C + |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Dunque per ogni $K \subset \mathbb{R}$ compatto esiste C_K tale che

$$|f(x,y)| \leq C_K (1+|y|) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in K.$$

Segue che la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$, $y \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Studiamo la monotonia della soluzione. Si ha:

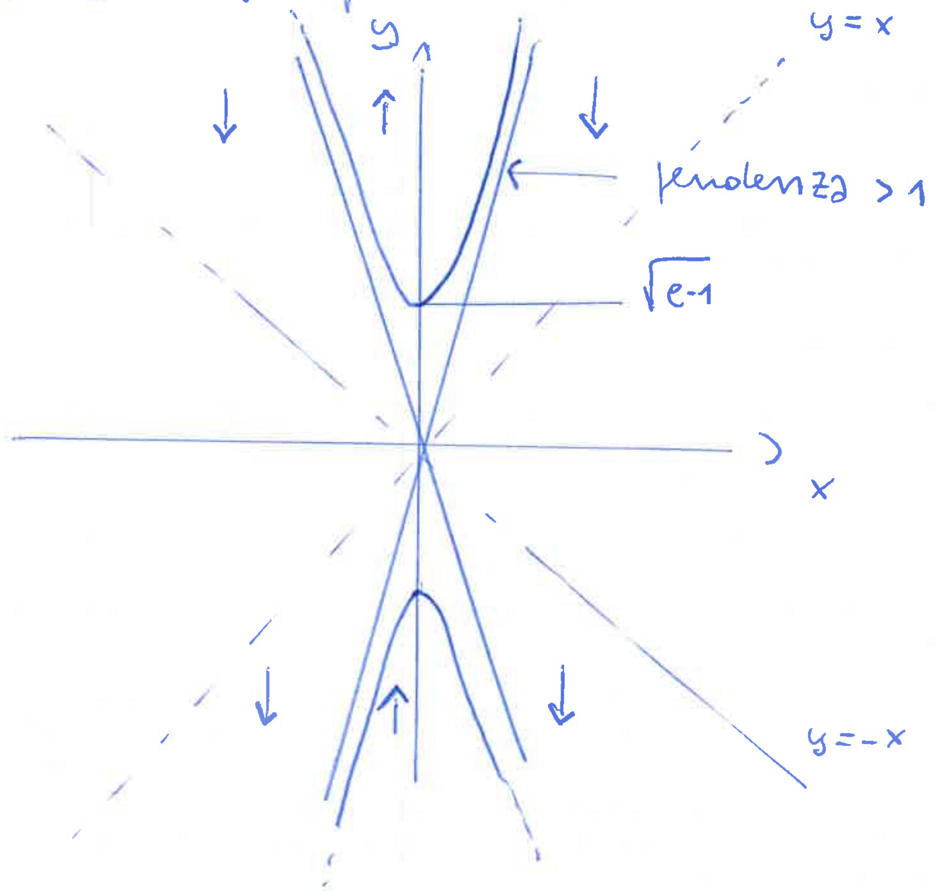
$$f(x,y) > 0 \iff \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right) > 1$$

$$\iff \frac{1+y^2}{1+x^2} > e$$

$$\iff \quad 1+y^2 > e + e x^2$$

$$\iff \quad |y| > \sqrt{e-1+ex^2}$$

Disegno



Osserviamo che $y'(0) = 0$, la soluzione passa per $(0, \sqrt{e-1})$ con derivata nulla.

Osserviamo che $y \equiv -x$ risolve l'equazione differenziale.

Per unicità deduciamo che la soluzione y del PC verifica $y(x) > -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

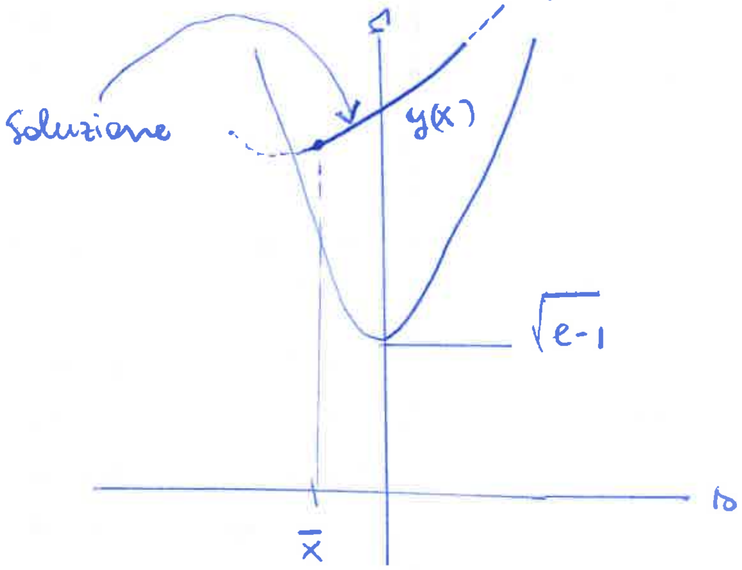
Concludiamo che il grafico di y è tutto contenuto nella regione dove $f < 0$ (salvo $x=0$).

Quindi la soluzione è sempre decrescente.

Motiviamo meglio questa affermazione:

Quando $x<0$ la soluzione non può entrare nella regione $y > \sqrt{e-1+e x^2} := \varphi(x)$.

Se infatti esistesse $\bar{x}<0$ tale che $y(\bar{x}) > \varphi(\bar{x})$ allora la situazione sarebbe questa:



e non potrebbe essere $y(0) = \sqrt{e-1}$.

I conti mostrano poi che

$$y(0) = \sqrt{e-1}$$

$$y'(0) = 0$$

$$y''(0) = 0 \quad \leftarrow \text{importante}$$

$$(\, y'''(0) \neq 0 \,)$$

Quindi per $x \to 0$ si ha lo sviluppo

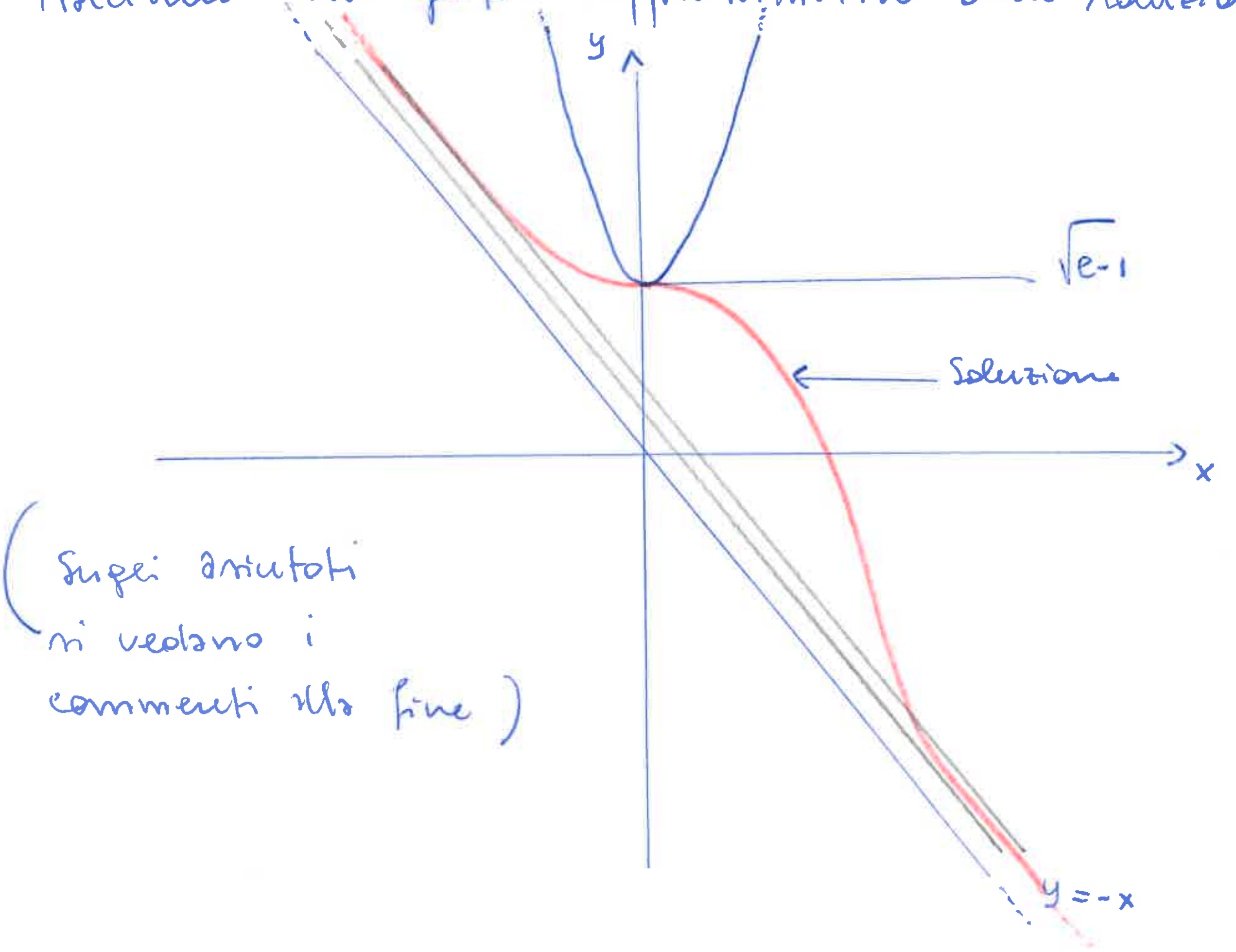
$$y(x) = \sqrt{e-1} + \frac{1}{6} y'''(0)\, x^3 + o(x^3)$$

Mentre

$$\varphi(x) = \sqrt{e-1} + \frac{e}{\sqrt{e-1}} \, \frac{1}{2} \, x^2 + o(x^2)$$

E quindi $y(x) < \varphi(x)$ per $x \in (0, \varepsilon)$ $(\Rightarrow \forall x > 0)$.
per monotonia

Tracciamo un grafico approssimativo della soluzione:



Proviamo l'esistenza dei limiti $L^{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}$.

Studiamo la derivata

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right) \underbrace{-x-y}_{\geq 0 \text{ sempre}}\right)$$

Per $x<0$ si ha $y(x)^2 > x^2$ e dunque $\log\left(\frac{1+y(x)^2}{1+x^2}\right) > 0$.

Segue che

$$x<0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' < 0 \Rightarrow L^- \text{ esiste (finito o o infinito)}$$

Calcoliamo ora il limite per $x \to -\infty$

$$L^- = \lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} y'(x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{1 + y(x)^2}{1 + x^2}\right) - 1$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 \frac{1 + \underbrace{\frac{1}{y(x)^2}}_{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right) - 1$$

$$= \log\left((L^-)^2\right) - 1$$

dove $L^- \in [-\infty, 0]$. Il caso $L^- = -\infty$ non è possibile. Siccome l'equazione $L = \log L^2 - 1$ ha l'unica soluzione $L = -1$ deve essere:

$$L^- = -1.$$

In modo analogo si mostra che $L^+ = -1$.

Mostriamo infine che y ha asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$. Abbiamo $y + x > 0 \ \forall x$ e inoltre

$$(y+x)' = \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right)$$

positiva per $x < 0$

negativa per $x > M > 0$

Deduciamo che i limiti

$$q_{-\infty} = \lim_{x \to \infty} y(x) + x$$

$$q_{\infty} = \lim_{x \to \infty} y(x) + x$$

esistono finiti e non negativi.

É certamente $q_{-\infty} > 0$.

$\square$

Esercizio Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{\sqrt{n} + n x^2}.$$

1) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[1, \infty)$

2) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[0,1]$

Risoluzione. Usiamo il Criterio di Abel-Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{= a_n} \underbrace{\frac{x}{1+\sqrt{n}\, x^2}}_{= f_n(x)}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per Leibniz. Proviamo che

$$(*) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$$

$$(**) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty$$

Seguirà che la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Partiamo da $(*)$. Si ha $f_n'(x) = \frac{(1+\sqrt{n}x^2) - 2x^2\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^2} =$

$= \frac{1-\sqrt{n}x^2}{(1+\sqrt{n}x^2)^2}$. Dunque $|f_n|$ assume massimo per

$x^2 = 1/\sqrt{n}$ e precisamente $\max_{\mathbb{R}} |f_n| = \frac{1}{2\sqrt[4]{n}} \leq 1$.

Passiamo a (**):

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x}{1+\sqrt{n+1}\,x^2} - \frac{x}{1+\sqrt{n}\,x^2} =$$

$$= x\,\frac{1+\sqrt{n}\,x^2 - (1+\sqrt{n+1}\,x^2)}{(1+\sqrt{n+1}\,x^2)(1+\sqrt{n}\,x^2)}$$

$$= x^3\,\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(1+\sqrt{n+1}\,x^2)(1+\sqrt{n}\,x^2)} = x^3\,\frac{-1}{(1+\sqrt{n+1}\,x^2)(1+\sqrt{n}\,x^2)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

Quindi

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{|x|^3}{2\sqrt{n}\,(1+\sqrt{n}\,x^2)^2} =: g_n(x)$$

Studiamo $g_n(x)$ per $x \geq 0$:

$$g_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}}\;\frac{3x^2(1+\sqrt{n}\,x^2)^2 - x^3\,2(1+\sqrt{n}\,x^2)\,2x\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}}\,x^2\,\frac{3(1+\sqrt{n}\,x^2) - 4\sqrt{n}\,x^2}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^3}$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{n}}\;\frac{3-\sqrt{n}\,x^2}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^3}$$

Quindi g_n assume massimo per $x^2 = \frac{3}{\sqrt{n}}$.

Quindi

$$\max_{\mathbb{R}} g_n = \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{16}$$

$$= \text{costante} \cdot \frac{1}{n^{5/4}}.$$

Segue che per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} < +\infty.$$

$\square$

Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: 24/8/2020 - Modalità telematica

INSTRUZIONI:

Spedire le soluzioni in bella copia manoscritta e controfirmata in ogni pagina come unico file pdf all'indirizzo monti@math.unipd.it entro le ore 11.00. Estensione del file:

`cognome_nome_matricola.pdf`

Il mancato rispetto di tali regole comporterà l'annullamento della prova.

Esercizio 1 Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4|y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

i) Determinatere tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua nel punto $(0,0)$.

ii) Determinatere tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile nel punto $(0,0)$.

Esercizio 2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \Big(2x + \frac{1}{1+y^2}, 2y + \frac{1}{1+x^2}\Big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è ~~un~~ iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

---

1 ora e 50 minuti a disposizione + 10 minuti per la consegna del file

Esercizio Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 |y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Prima stima:

$$\frac{x^4 |y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} \leq \frac{x^4 |y|^\alpha}{|x|^{7/2}} = \sqrt{|x|}\, |y|^\alpha \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$$

se $\alpha \geq 0$.

Dunque:

$$\alpha \geq 0 \implies f \text{ continua in } 0.$$

Studiamo il caso $\alpha < 0$. Lungo $y = x^m$ (con m parametro) si ha

$$f(x, x^m) = \frac{x^4 |x|^{m\alpha}}{(x^2 + |x|^{4m})^{7/4}} =$$

$$= \frac{|x|^{4+m\alpha-7/2}}{(1+|x|^{4m-2})^{7/2}}$$

Scegliamo $m \in \mathbb{N}$ tale che:

1) $4m - 2 > 0$

2) $4 + m\alpha - 7/2 < 0$

Esiste tale m in quanto $\alpha < 0$.

Con tale scelta:

$$\lim_{x \to \infty} f(x, x^m) = +\infty .$$

Dunque:

$$\alpha < 0 \implies f \text{ non è continua in } (0,0).$$

ii) Sugli assi è $f = 0$. Dunque $\nabla f(0,0) = 0$.

Dobbiamo capire per quali $\alpha \geq 0$ si ha

$$\circledast \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 \, |y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2} \, (x^2+y^4)^{7/4}} = 0$$

Prima stima:

$$\left| \frac{x \cdot x^3 \, |y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2} \, (x^2+y^4)^{7/4}} \right| \leq \frac{|x|^3 \, |y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} \leq (x^2+y^4)^{\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{4} - \frac{7}{4}}$$

Quando l'esponente $\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{4}-\frac{7}{4}=\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{4}$ è positivo la ⊛ è vera. Dunque per $\alpha>1$ f è differenziabile.

Seconda stima:

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{|x|}\,|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}$$

Quando l'esponente $\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}$ è positivo ($\Leftrightarrow \alpha>1/2$) la ⊛ è vera. È una stima migliore. Dunque:

$$\alpha>\frac{1}{2} \Longrightarrow f \text{ diff. in } 0.$$

~~con $y=x^m$ ed $m\in\mathbb{N}$ tale che $4m>2$~~ :

$$\cancel{\frac{f(x,x^m)}{\sqrt{x^2+x^{2m}}}=\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^{2m-2}}}\cdot\frac{|x|^{1+m\alpha-7/2}}{(1+x^{4m-2})^{7/2}}}$$

Con la scelta $x=y$ si trova

$$\frac{x^4\,|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^4)^{7/4}} = \frac{|x|^{4+\alpha-1-7/2}}{\sqrt{2}\,(1+x^2)^{7/4}} =$$

$$= \frac{|x|^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\,(1+x^2)^{7/4}}$$

Per $\alpha \leq 1/2$ vediamo che l'ultima quantità non è infinitesima. Dunque

$$\alpha \leq 1/2 \quad \Rightarrow \quad f \text{ non è differenziabile in } 0.$$

<u>Esercizio</u> Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(2x + \frac{1}{1+y^2} \, , \; 2y + \frac{1}{1+x^2} \right)$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale

ii) Stabilire se F è 1-1 e su da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. i) La matrice Jacobiana di F è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{-2y}{(1+y^2)^2} \\ & \\ \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} & 2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\det(JF(x,y)) = 4 - 4 \frac{xy}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

Osserviamo che

$$\frac{|x|}{(1+x^2)^2} = \underbrace{\frac{|x|}{(1+x^2)}}_{\leq 1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2}$$

Dunque $\det(JF(x,y)) = 4\left(1 - \frac{xy}{[(1+x^2)(1+y^2)]^2}\right) \geq 4\left(1-\frac{1}{4}\right) = 3$

Dal teorema di invertibilità locale segue che

F è un diffeomorfismo locale.

ii) Dato un punto $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ cerchiamo di risolvere l'equazione $F(x,y) = (\xi, \eta)$ che è

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{1+y^2} = \xi \\ 2y + \dfrac{1}{1+x^2} = \eta \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi}{2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+y^2} \\ y = \dfrac{\eta}{2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Definiamo $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$G(x,y) = \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+y^2}, \frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\right)$$

dove ξ, η sono fissati. Proviamo che G è una contrazione da $\mathbb{R}^2$ in sé:

$$G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2}, \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2}\right)$$

Ora osserviamo che

$$\left|\frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2}\right| = \left|\frac{x_1^2 - x_2^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\right| =$$

$$= \left|(x_1-x_2)\frac{x_1+x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\right| \leq |x_1-x_2|$$

Di conseguenza

$$|G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2)| \leq \frac{1}{2}|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)|.$$

Conclusione: G ha un unico punto fisso (per ogni (ξ,η) fissato). Dunque $F(x,y) = (\xi,\eta)$ ha soluzione unica. Ovvero $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è 1 e 1.

$\square$

Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: 3/9/2020 - Modalità telematica

INSTRUZIONI:

Spedire le soluzioni in bella copia manoscritta e controfirmata in ogni pagina come unico file pdf all'indirizzo monti@math.unipd.it entro le ore 11.00. Estensione del file:

`cognome_nome_matricola.pdf`

Il mancato rispetto di tali regole comporterà l'annullamento della prova.

Esercizio 1 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - x^2y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Disegnare un grafico motivato della soluzione massimale del problema di Cauchy.

ii) Dimostrare che esiste e quindi calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} xy(x).$$

Esercizio 2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \Big(x + \frac{1}{2}\sin y, y + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

---

1 ora e 50 minuti a disposizione + 10 minuti per la consegna del file

ESERCIZIO Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - x^2 y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

i) Disegnare un grafico della soluzione massimale

ii) Provare che esiste e calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to \infty} x\, y(x).$$

Soluzione i) Esistenza locale. La funzione $f = 1 - x^2 y^2$ verifica $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi soddisfa la condizione di Lipschitz. Per il teorema di Cauchy-Lipschitz esiste un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

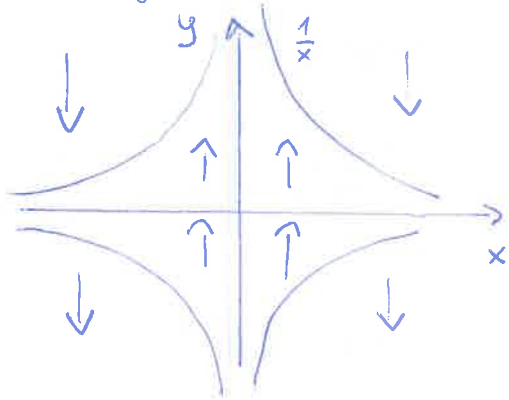
Simmetrie. Sia $z(x) = -y(-x)$. Allora $z(0) = 0$ e

$$z'(x) = +\, y'(-x) = 1 - (-x)^2 (y(-x))^2 = 1 - x^2 z(x)^2.$$

Per unicità della soluzione del PC segue che $z = y$. Quindi y è dispari.

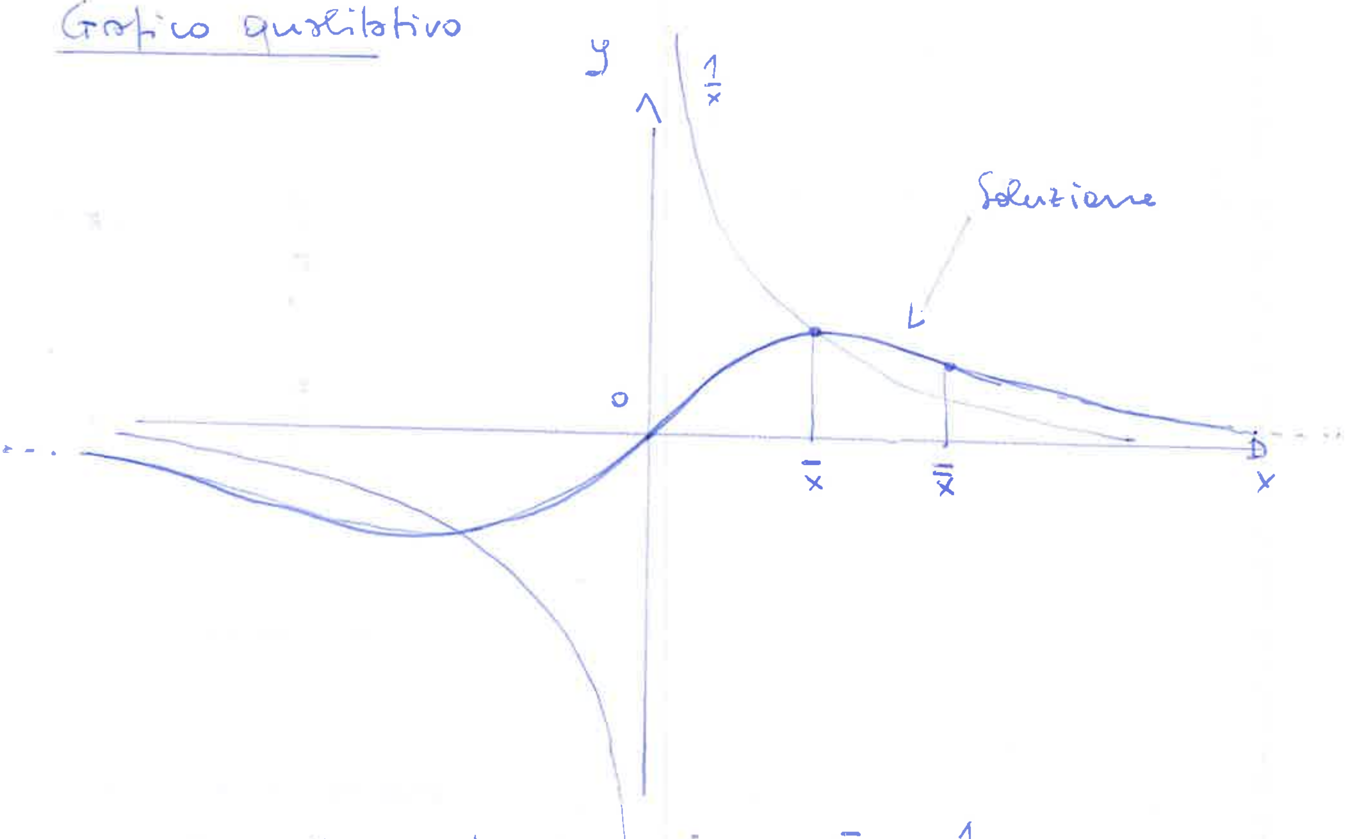
Monotonia. Nella regione dove $f(x,y) > 0$ la soluzione è crescente. Precisamente

$$f > 0 \iff 1 - x^2 y^2 > 0 \iff |y| < \frac{1}{|x|}$$



Siccome $y(0)=0$, y è crescente per x intorno a 0.
Deve per forza entrare nella regione $y > \frac{1}{x}$ con $x>0$ dove la soluzione diventa decrescente. Da questa regione la soluzione non può più uscire. Dunque definitivamente per $x \to +\infty$ si ha $y(x) > \frac{1}{x}$.
Questo prova che la soluzione massimale è definita per $x \in \mathbb{R}$.

<u>Grafico qualitativo</u>



Sia $\bar{x} > 0$ il punto in cui $y(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}}$.
Ci aspettiamo l'esistenza di un punto di flesso $\bar{\bar{x}} > \bar{x}$.

Convessità   La derivata seconda è

$$y'' = -2xy^2 - 2x^2yy' = -2xy\left(y + xy'\right)$$

$$= -2xy\left(y + x\left(1 - x^2y^2\right)\right) = g(x,y)$$

Studiamo la convessità dove $x>0$. Qui si ha $y>0$.

Dunque, nel 1° quadrante:

$$g(x,y) > 0 \iff y + x(1 - x^2y^2) < 0$$

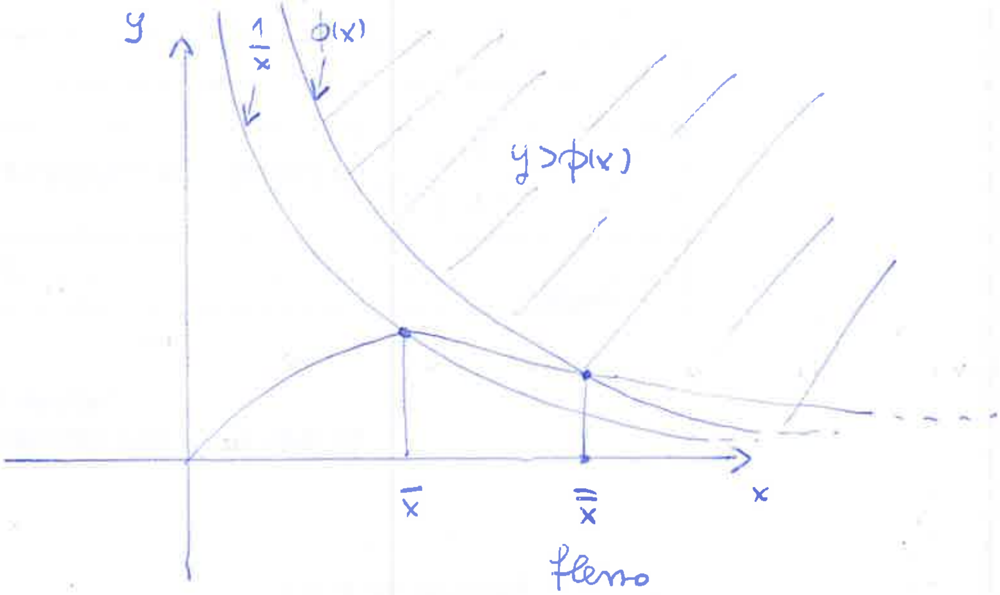
$$\iff x^3y^2 - y + x > 0$$

Risolvendo la disequazione in y per x fissato si trova

$$y > \frac{1 + \sqrt{1+4x^4}}{2x^3} = \phi(x).$$

(Non ci interessa la parte $y < \frac{1}{2x^3}\left(1 - \sqrt{1+4x^4}\right)$.)

Osserviamo che $\phi(x) > \frac{1}{x}$ per $x>0$:



La soluzione deve per forza entrare nella regione dove $y > \phi(x)$. Una volta entrata non può più uscirne. Dunque esiste $\bar{\bar{x}} > \bar{x}$ tale che y è concava su $(0, \bar{\bar{x}})$ e convessa su $(\bar{\bar{x}}, \infty)$.

ii) Per $x > \bar{\bar{x}}$ abbiamo $y''(x) > 0$. Quindi y' è crescente su $(\bar{\bar{x}}, \infty)$. Quindi esiste finito il limite

$$\lim_{x \to \infty} y'(x) = M \leq 0$$

Se fosse $M < 0$ si avrebbe $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$, impossibile. Quindi $M = 0$.

Di conseguenza

$$\lim_{x \to \infty} x^2 y(x)^2 = 1.$$

Siccome $x\, y(x) > 0$ per $x > 0$, deduciamo che

$$\lim_{x \to \infty} x\, y(x) = 1.$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(x + \frac{1}{2} \sin y,\ y + \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right),$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è 1-1 e su da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Soluzione i) È certamente $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$.

La sua matrice Jacobiana è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \cos y \\ \frac{x}{1+x^2} & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det JF(x,y) = 1 - \frac{1}{2} \cos y \cdot \frac{x}{1+x^2}$.

Siccome $|\cos y| \leq 1$ e $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ deduciamo che

$$\det JF(x,y) \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0 .$$

Per il Teorema di invertibilità locale F è un diffeomorfismo locale.

ii) Dati $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ cerchiamo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tale che $F(x,y)=(\xi,\eta)$, ovvero

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}\sin y = \xi \\ y+\frac{1}{2}\log(1+x^2)=\eta \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \xi-\frac{1}{2}\sin(y) = G_1(x,y) \\ y = \eta-\frac{1}{2}\log(1+x^2) = G_2(x,y) \end{cases}$$

Posto $G=(G_1,G_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ abbiamo l'equazione di punto fisso $G(x,y)=(x,y)$.

Se G è una contrazione esiste un unico punto fisso $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Questo proverebbe che F è 1-1 e su.

Abbiamo:

$$|G(x,y)-G(\bar{x},\bar{y})| = \left|\left(\frac{1}{2}\sin(\bar{y})-\frac{1}{2}\sin(y),\ \frac{1}{2}\log(1+\bar{x}^2)-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)\right|$$

Per il Teorema di Lagrange

$$|\sin(\bar{y})-\sin(y)|\le|\bar{y}-y| \quad \text{e}$$

$$|\log(1+\bar{x}^2)-\log(1+x^2)|\le |\bar{x}-x|$$

Infatti $\| D \log(1+x^2) \|_\infty \leq 1$. Deduciamo che

$$|G(x,y) - G(\bar{x},\bar{y})| \leq \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{y}-y|^2 + |\bar{x}-x|^2} =$$

$$= \frac{1}{2} |(x,y) - (\bar{x},\bar{y})| .$$

Dunque G è una contrazione di fattore $\frac{1}{2}$.

$\square$