Ingegneria Meccanica – Fisica Generale 1 – **CANALE 2**

Prova del 6 Settembre 2023 – Prof. Merano, Giubilato

Matricola: Cognome: Nome:

- Non si consegnano i fogli di brutta
- Fogli senza matricola, cognome e nome non saranno considerati validi
- Si può utilizzare il solo formulario e la calcolatrice non programmabile
- La presenza di qualsiasi altro testo, documento, foglio, strumento,… **invaliderà la prova**
- Le risposte alle DOMANDE sono considerate valide se viene indicata la risposta esatta, **e la scelta è correttamente giustificata nello spazio libero sottostante alla domanda stessa**.
- Le DOMANDE con **risposta corretta** valgono **2 punti**, le domande **senza risposta 0 punti**, le domande **errate** incorrono in una penalizzazione di **-0.5 punti**.
- Gli ESERCIZI vanno svolti con ordine, e **i risultati giustificati analiticamente**. Risultati numericamente o algebricamente corretti, ma mancanti dei passaggi necessari a giustificarli, non verranno considerati validi.

Formulario

Costanti

$g_0 \cong 9.81\ \frac{m}{s^2}$	$G \cong 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$		
$M_\oplus \cong 5.972 \times 10^{24}\ kg$	$R_\oplus \cong 6.4 \times 10^6\ m$	$M_\odot \cong 1.989 \times 10^{30}\ kg$	
$\rho_{H_2O} \cong 1 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$	$\rho_{air} \cong 1.25 \frac{kg}{m^3}$	$\mu_{H_2O} \cong 0.864 \times 10^{-3} Pa\ s$	
$c \cong 3 \times 10^8\ \frac{m}{s}$	$q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\ C$	$\varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$	$\mu_0 \cong 1.256 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$
$m_e \cong 9.01 \cdot 10^{-31}\ kg$	$m_p \cong 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$		

Cinematica, dinamica, lavoro ed energia del punto materiale

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$\mathbf{a_C} = -\omega^2 \mathrm{r}\, \boldsymbol{u}_r = -\frac{v^2}{r}\, \boldsymbol{u}_r$	
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt}$	$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$
$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \quad \frac{dW}{dt} = P$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_g = mgh$	$E_e = \frac{1}{2}kx^2$

Gravitazione

$\boldsymbol{F} = G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$U = G\frac{Mm}{r}$		

Momenti

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	

Moti armonici

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$T_{molla} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_{pendolo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dinamica, lavoro ed energia del corpo rigido

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i / \sum m_i$$

$$I = \sum r_i^2 m_i$$

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$I = \acute{I} + mr^2$$

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$$

$$E_{kr} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

$$I_{asta} = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I_{anello} = mr^2$$

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_{sfera} = \frac{2}{5}mr^2$$

Meccanica e dinamica dei fluidi incomprimibili

$$F_A = \rho V g$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = k$$

$$Av = cost$$

$$Re = \frac{\rho}{\mu}Lv_r = \frac{L}{\nu}v_r$$

$$F_{lmn} = 6\pi r\mu v$$

Elettrostatica

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{E}_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

$$V_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Campi

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$V = \int -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dr} + k$$

$$\phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$C_\Gamma(\boldsymbol{E}) = \iint_\Sigma (\nabla\times\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{d\Sigma}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{E}_{anello} = \frac{\lambda R y}{2\varepsilon_0(R^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{E}_{piano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{E}_{sup.\ cond.} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$$

Capacità, condensatori

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

$$C_{piano} = \frac{A}{d}\varepsilon_0$$

$$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$C_{par} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$\frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

1) [2 **pt**] Domanda 1

Quale di queste affermazioni non è una proprietà caratterizzante di una forza conservativa

1) Il suo lavoro non dipende dal percorso
2) Ammette energia potenziale
3) Il lavoro all'andata (da un punto A ad un punto B) è l'opposto del lavoro al ritorno
4) Il suo lavoro è pari alla variazione di energia cinetica
5) Il lavoro su di un percorso chiuso è nullo

2) [2 **pt**] Domanda 2

A che velocità corrisponde nel Sistema Internazionale una velocità di 87 km/h? Specificare l'unità di misura nella risposta.

1) 24.2 2) 313.2 3) 3.6 4) 1450 5) 3625

3) [2 **pt**] Domanda 3

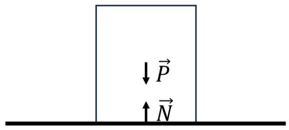
Sapendo che il raggio *R* della Terra è pari a 6371 km, si calcoli quanto vale all'equatore il modulo del termine centrifugo di correzione a $\vec{g}$ per effetto della rotazione terrestre sul proprio asse.

1) $3{,}4 \cdot 10^{-2}$ m/s^2
2) $8.5 \cdot 10^{-4}$ m/s^2
3) $7.1 \cdot 10^{-5}$ m/s^2
4) $2.5 \cdot 10^{-7}$ m/s^2
5) $6{,}4 \cdot 10^{-9}$ m/s^2

4) [2 **pt**] Domanda 4

Un corpo di massa m, assimilabile ad un punto materiale, è fermo su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito statico pari a μ_s e coefficiente di attrito dinamico pari a μ_d. Sia $\vec{N}$ la reazione vincolare del piano al peso del corpo. Quanto vale il modulo della forza di attrito che agisce sul corpo.

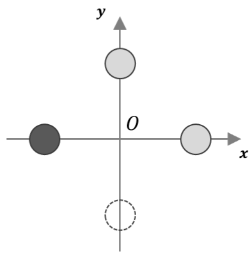
1) Nullo, 2) $m \cdot g$, 3) N, 4) $\mu_d \cdot N$, 5) $\mu_s \cdot m \cdot g$



5) [2 **pt**] Domanda 5

3 cariche identiche in modulo $|q|$ sono poste sugli assi cartesiani ad identica distanza dall'origine, come in figura; positive quelle scure, negative quelle chiare. E' possibile, mettendo una quarta carica nella posizione tratteggiata alla medesima distanza dall'origine, individuare una traiettoria in cui una particella carica in moto possa mantenere una traiettoria rettilinea?

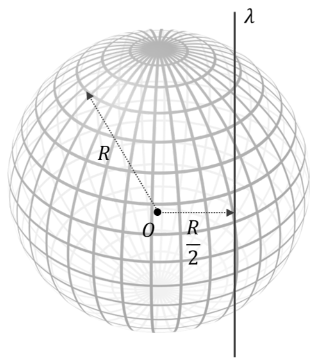
1) Serve una carica negativa $-q$, e la traiettoria risultante è $y = x$.
2) Serve una carica positiva $+q$, e la traiettoria risultante è $y = x$.
3) Serve una carica negativa $-q$, e la traiettoria risultante è $y = -x$.
4) Serve una carica positiva $+q$, e la traiettoria risultante è $y = -x$.
5) Non è mai possibile, per qualsiasi segno della 4ta carica.



6) [2 **pt**] Domanda 6

Un filo carico rettilineo avente densità lineare di carica λ attraversa una sfera di raggio R a distanza $\frac{R}{2}$ dal centro della stessa. Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie della sfera risulta essere:

1) $\frac{\sqrt{3}R\lambda}{2\,\varepsilon_0}$, 2) $\frac{\sqrt{2}R\lambda}{\varepsilon_0}$, 3) $\frac{\sqrt{3}R}{\lambda}\varepsilon_0$, 4) $\frac{\sqrt{2}\lambda}{\varepsilon_0 R}$, 5) $\frac{\sqrt{3}R\lambda}{\varepsilon_0}$



7) [**6 pt**] Esercizio 1

Da un'altezza $h = 10\ m$ dal suolo vengono lasciate cadere, con velocità iniziale nulla, delle sferette di piombo, con un intervallo costante $\tau = 0.3\ s$ dall'una all'altra.

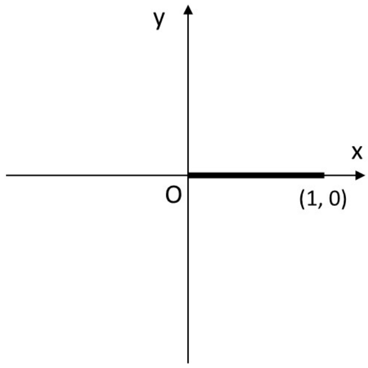
1) [**2pt**] Quale intervallo intercorre tra due arrivi successivi al suolo?

Nell'istante in cui una sferetta arriva al suolo:

2) [**2pt**] Quante sferette stanno viaggiando (sono in volo) verso il basso?
3) [**2pt**] A quale distanza ciascuna di esse si trova dal suolo?

8) [**8 pt**] Esercizio 2

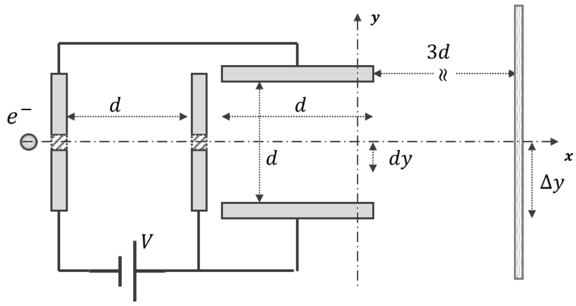
Un'asta omogenea AB di lunghezza $l = 1\ m$, massa $m = 1\ kg$ e dimensioni trasversali trascurabili ruota su un piano orizzontale liscio attorno all'estremo A di coordinate $(0, 0)$, con velocità angolare costante $\vec{\omega} = 1{,}6\ \hat{k}\ \mathrm{rad/s}$. All'istante $t = 0\ s$ (vedi disegno) in cui la posizione dell'altro estremo è $B = (1\ m, 0)$ viene tolto il vincolo che tiene l'asta in rotazione e questa continua il moto per inerzia.



1) [**3pt**] Quali sono le quantità dinamiche che si conservano? Spiegarne i motivi.
2) [**2pt**] Si determini la posizione e la velocità del centro di massa a $t = 1{,}2\ s$
3) [**3pt**] Si determinino le posizioni di A e B a t = 1,2 s

9) [**8 pt**] Esercizio 3

Due condensatori a facce piano parallele sono connessi ad un generatore di potenziale $V = 1125\ V$ come in figura. Attraverso un forellino di dimensioni trascurabili, degli elettroni aventi velocità nulla vengono introdotti nel primo condensatore, dove accelerano fino ad uscire da un forellino corrispondente sull'armatura opposta, per proseguire attraverso un secondo condensatore, avente lunghezza delle armature $d = 2\ cm$, e medesima distanza tra le stesse $d = 2cm$.



Determinare (assumere la massa dell'elettrone pari a $m_e \cong 9 \times 10^{-31} kg$):

1) [**2pt**] La velocità di uscita degli elettroni dal primo condensatore.
2) [**3pt**] Lo scostamento dall'asse dy degli elettroni in uscita dal secondo condensatore.
3) [**3pt**] Lo scostamento dall'asse ΔY degli elettroni quando arrivano a colpire uno schermo posto a distanza $3l$ dalla fine del secondo condensatore.

Svolgimento

Svolgimento

Svolgimento

Soluzioni

1) Domanda 1

Per il teorema dell'energia cinetica il lavoro di qualunque forza o risultante di forze che si esercita su di un corpo è pari alla sua variazione di energia cinetica, quindi la risposta è la 4)

2) Domanda 2

Nel Sistema Internazionale le lunghezze si misurano in metri e il tempo in secondi per cui

$$87\frac{km}{h} = 87\frac{1000\ m}{3600\ s} = 24.2\ m/s$$

3) Domanda 3

La terra ruota su se stessa con un periodo $T = 24h = 86400\ s$. Questo corrisponde ad una velocità angolare pari a $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.27 \cdot 10^{-5}\ rad/s.$
All'equatore la correzione centrifuga a $\vec{g}$ è diretta come $\vec{g}$ ed opposta ad essa e il suo modulo vale $\omega^2 R = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ m/s^2

4) Domanda 4

Non essendoci forze in direzione orizzontale il modulo della forza di attrito è nullo.

5) Domanda 5

La risposta corretta è "**Serve una carica positiva, e la traiettoria risultante è y=x**". Inserendo nella posizione "vuota" una carica positiva identica in moduloalle altre si ottiene un sistema simmetrico lungo l'asse $y = x$, in cui non vi possono essere componenti del campo elettrico ortogonali all'asse stesso. Una particella carica che segue quella traiettoria sarà soggetto solo a forze parallele (o antiparallele) alla direzione del suo moto, che rimarra quindi rettilineo (ma non uniforme).

6) Domanda 6

La risposta corretta è $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}R\lambda}{\varepsilon_0}}$. La quantità di carica all'interno della sfera è pari a λl, con l lunghezza del filo contenuta all'interno della sfera. Sapendo che la distanza del filo dal centro della sfera è $R/2$, si ha (eguaglianza goniometrica) che $\frac{l}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, da cui la carica cercata risulta $\sqrt{3}R\lambda$. Per il th. di Gauss, il flusso sarà quindi pari a $\frac{\sqrt{3}R\lambda}{\varepsilon_0}$.

7) Esercizio 1

1) Essendo il tempo di caduta lo stesso per tutte le sferette il loro ritardo rimane invariato. L'intervallo tra due arrivi successivi al suolo è quindi 0.3 s
2) La sferetta cade di moto rettilineo uniformemente accelerato. Partendo da ferma, il tempo che ha impiegato a cadere rispetta la legge $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1.43\ s$. Quando una sferetta tocca il suolo ce ne sono altre 4 in volo (la parte intera di $\frac{t}{\tau} = \frac{1.43}{0.3} = 4.7$ cioè 4).
3) Esse si trovano ad una distanza dal suolo pari a $h - s_i$ dove s_i è la distanza percorsa dall' i esima sferetta (i varia da 1 a 4). I tempi di volo delle sferette sono dati da $t - i \cdot \tau$ e quindi abbiamo

$$h - s_i = h - \frac{1}{2} g \cdot (t - i \cdot \tau)^2 = \begin{matrix} 9.74\ m \\ 8.62\ m \\ 6.62\ m \\ 3.74\ m \end{matrix}$$

8) Esercizio 2

1) Si conservano l'energia cinetica perché non ci sono attriti e forze che compiono lavoro. Per la prima equazione cardinale della meccanica si conserva la quantità di moto totale dell'asta, perché la risultante delle forze esterne (forza peso e reazione del piano) che agisce sull'asta è nulla. Per la seconda equazione cardinale della meccanica si conserva il momento angolare dell'asta rispetto ad un polo fisso e rispetto al baricentro perché il momento delle forze esterne è nullo (la forza peso e la reazione del piano sono applicate lungo la stessa direttrice).
2) Per la conservazione della quantità di moto totale del sistema, la velocità del centro di massa rimane invariata per tutti i tempi $t \geq 0$. Al tempo t =0 s la velocità del centro di massa è pari a: $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \frac{l}{2} \hat{\imath} = 0{,}8\, \hat{\jmath}\ m/s$ dove $\frac{l}{2} \hat{\imath}$ è il raggio vettore del centro di massa dell'asta. Al tempo t = 1,2 s la coordinata x del centro di massa non sarà variata rispetto a t = 0 s (x= 0,5 m) mentre la coordinata y sarà pari a $y = v_{CM}\ t = 0{,}96\ m.$
3) Dobbiamo trovare con che velocità angolare l'asta ruota attorno a baricentro (unico movimento ulteriore possibile). Per il teorema di König al tempo t = 0 s il momento angolare rispetto all'estremo A è pari al momento angolare del baricentro più il momento angolare nel sistema del baricentro

$$I_A \vec{\omega} = \frac{l}{2} \hat{\imath} \times m \vec{v}_{CM} + I_{CM} \vec{\omega}_{CM} \rightarrow I_A \vec{\omega} = \frac{l}{2} \hat{\imath} \times m \left(\vec{\omega} \times \frac{l}{2} \hat{\imath} \right) + I_{CM} \vec{\omega}_{CM} \rightarrow$$

$$I_A \omega \hat{k} = m\omega \left(\frac{l}{2} \right)^2 \hat{k} + I_{CM} \vec{\omega}_{CM}$$

Dove I_A e I_{CM} sono i momenti di inerzia dell'asta rispetto all'estremo A e al suo centro di massa. Come atteso la velocità angolare del centro di massa è diretta come l'asse z (l'asta ruota sul piano). Abbiamo quindi un'equazione scalare

$$I_A \omega = m\omega \left(\frac{l}{2} \right)^2 + I_{CM} \omega_{CM} \rightarrow \frac{1}{3} m l^2 \omega = m\omega \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} m l^2 \omega_{CM} \rightarrow \omega = \omega_{CM}.$$

All' istante t = 1,2 s il baricentro sarà traslato verso l'alto di 0.96 m e l'asta avrà ruotato in senso antiorario attorno ad esso di un angolo pari a ωt = 1,92 rad = 110°.

Avremo
$$B = \left(\frac{l}{2}(1 + \cos \omega t),\ \left(v_{CM} t + \frac{l}{2} \sin \omega t \right) \right) = (0{,}33,\ 1{,}43)$$
$$A = \left(\frac{l}{2}(1 - \cos \omega t),\ \left(v_{CM} t - \frac{l}{2} \sin \omega t \right) \right) = (0{,}67,\ 0{,}49)$$

9) Esercizio 3

All'esterno del condensatore l'elettrone è inizialmente in quiete, con energia potenziale e cinetica nulla. Appena entra tra le armature viene accelerato dal campo elettrico presente; l'energia cinetica con cui arriva alla seconda armatura sarà pari alla differenza di energia potenziale, da cui si ricava facilmente la sua velocità lungo l'asse orizzontale quando esce dalla seconda armatura:

$$q_0 V = \frac{1}{2} m_e {v_x}^2 \quad \rightarrow \quad v_x = \sqrt{\frac{2q_0 V}{m_e}}$$

dove $m_e \cong 9 \times 10^{-31}\,kg$ è la massa dell'elettrone, e $q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\,C$ la carica elementare. Numericamente si trova:

$$v_x = \sqrt{\frac{2q_0 V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \cdot 1125}{9 \times 10^{-31}}} \cong 2 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

Nell'attraversare il secondo condensatore, l'elettrone prosegue di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x, mentre subisce una forza costante lungo l'asse y, dovuta al campo presente all'interno del condensatore. Il tempo impiegato ad attraversare le due armature risulta:

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{\sqrt{\frac{2q_0 V}{m_e}}}$$

Numericamente si ha:

$$t = \frac{2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{7}} = 1 \times 10^{-9} s = 1\,ns$$

La forza lungo l'asse y sarà data da $F = q_0 E$, dove il campo elettrico all'interno del condensatore risulta costante, e di modulo pari a:

$$E = \frac{V}{d} \quad \rightarrow \quad F = -q_0 \frac{V}{d}$$

Notare il segno meno, che indica come la forza sarà diretta in direzione opposta all'asse delle ordinate. L'elettrone subisce quindi un moto accelerato uniforme lungo l'asse y, che lo sposta, all'uscita del secondo condensatore, di una distanza pari a:

$$\mathrm{dy} = \frac{1}{2} a t^2 = -\frac{1}{2} \frac{F}{m_e} \left(\frac{l}{\sqrt{\frac{2q_0 V}{m_e}}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{q_0}{m_e} \frac{V}{d} \frac{l^2}{\frac{2q_0 V}{m_e}} = -\frac{1}{4} \frac{l^2}{d}$$

Numericamente abbiamo:

$$\mathrm{dy} = -\frac{1}{4} \frac{(0.02)^2}{0.02} = 0.005\,m \equiv 5\,mm$$

La velocità lungo l'asse y all'uscita del condensatore sarà:

$$v_y = at = \frac{F}{m_e}\frac{l}{\sqrt{\frac{2q_0 V}{m_e}}} = \frac{q_0}{m_e}\frac{V}{d}\frac{l}{\sqrt{\frac{2q_0 V}{m_e}}} = \frac{l}{d}\sqrt{\frac{Vq_0}{2m_e}} = \frac{v_x}{2}$$

Verifichiamo la correttezza dimensionale:

$$\left[\!\left[\frac{m}{m}\sqrt{V\frac{C}{kg}}\right]\!\right] = \left[\!\left[1\sqrt{\frac{J}{C}\frac{C}{kg}}\right]\!\right] = \left[\!\left[\sqrt{\frac{J}{kg}}\right]\!\right] = \left[\!\left[\sqrt{\frac{kg\ m^2}{kg\ s^2}}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{m}{s}\right]\!\right]$$

La tangente dell'angolo α di uscita dell'elettrone dal condensatore di deflessione risulta quindi essere:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{l}{d}\sqrt{\frac{Vq_0}{2m_e}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2q_0 V}{m_e}}} = \frac{1}{2}\frac{l}{d}$$

Lo spostamento totale lungo l'asse y dell'elettrone, dopo un volo in moto rettilineo sarà quindi:

$$\Delta Y = dy + 3l\tan\alpha = \frac{1}{4}\frac{l^2}{d} + 3l\frac{2}{4}\frac{l}{d} = \frac{7}{4}\frac{l^2}{d}$$

Sostituendo numericamente si trova infine:

$$\Delta Y = \frac{7}{4}\frac{(0.02)^2}{0.02} = 0.035\ m \equiv 35\ mm$$