Compito di Microeconmia
Prof. Michele Moretto
15 Settembre 2023

N.B. Le spiegazioni richieste o quelle che si ritiene utile dare non devono superare le 3 righe.

1. (5 punti) Il reddito di un individuo è dato dal suo lavoro. Il salario orario è fissato ed è pari a $w = 1$. Si supponga che l'individuo non possa lavorare per più di 16 ore al giorno: $L \leq 16$. Inoltre, egli ottiene una utilità dal consumo del tempo libero, $T = 16 - L$ e dal consumo di un bene x, il cui prezzo è fissato pari a $p = 1$. Nell'ipotesi che il soggetto abbia funzione di utilità data da:

$$U(x, T) = (x + 1)^2 (T + 1)^2$$

   (a) Determinare la funzione di offerta di lavoro dell'individuo.

2. (10 punti) La tecnologia di un'impresa è data dalla seguente funzione di produzione: $q = F(x, y) = xy$, dove x e y sono i due fattori di produzione e w_x e w_y i rispettivi prezzi unitari.

   (a) Si l'impresa decide di produrre 100 unità si ricavino le funzioni di domanda degli input
   (b) Si ricavi la funzione di costo dell'impresa;
   (c) Se ora l'impresa volesse produrre 400 come cambia la funzione di costo?
   (d) Se i prezzi dei fattori sono $w_x = 1$ e $w_y = 1$, si calcolino i costi totali, medi e marginali per produrre 100 e 400;
   (e) I costi medi e marginali sono coerenti con la funzione di produzione? Se si spiegare il perchè.

3. (10 punti) Esaminate il seguente oligopolio a la Cournot. Supponete che in un particolare mercato la domanda sia $Q = 1000 - p$ e che ciascuna impresa abbia costo marginale costante pari a $MC = 100$

   (a) Quali sono il prezzo e il volume di produzione di equilibrio quando nel mercato ci sono due imprese?
   (b) Come cambierebbe il prezzo e il volume di produzione di equilibrio quando nel mercato ci sono tre imprese ma due colludessero tra loro? Indicate con 2 e 3 le imprese che colludono

(c) Come cambiarebbe l'equilibrio di mercato se invece le imprese 2 e 3 che colludono, giocassero come leader mentre l'impresa uno fosse il follower?

4. (5 punti) Considerate un mercato di un bene omogeneo. La funzione di offerta aggregata in questo mercato è uguale a: $S(p) = 5000p$. Mentre la funzione di domanda è data dalla domanda di due gruppi di consumatori. Il primo gruppo ha funzione di domanda $D_1(p) = 5000(20 - p)$. Il secondo gruppo di consumatori ha funzione di domanda $D_2(p) = 10000(14 - p)$.

   (a) Scrivete la domanda aggregata dei due gruppi $D(p) = D_1(p) + D_2(p)$

   (b) Trovate l'equilibrio di mercato.

Soluzioni

ES 1

Il vincolo di bilancio è

$$px = wL$$
$$x = L = 16 - T$$

La funzione di offerta. L'individuo massimizza la sua funzione di utilità sotto il vincolo di bilancio

$$\max_{x,T} (x+1)^2 (T+1)^2$$
$$s.t.\ x = 16 - T$$

Possiamo sostituire il vincolo direttamente all'interno della funzione di utilità

$$\max_{T} (17-T)^2 (T+1)^2$$

Le condizioni di primo ordine sono:

$$\begin{aligned} 2(17-T)(T+1)^2(-1) + 2(17-T)^2(T+1)(+1) &= 0 \\ -(17-T)(T+1)^2 + (17-T)^2(T+1) &= 0 \\ (17-T)(T+1)\left[-(T+1) + (17-T)\right] &= 0 \\ T &= 8 \end{aligned}$$

L'offerta di lavoro sarà

$$L = 8$$

Ovviamente si può fare il sistema fra SMS e il vincolo di bilancio, in questo caso è:

$$SMS = \frac{T+1}{x+1}$$
$$x = 16 - T$$

ES 2

a) Il problema è la minimizzazione dei costi per raggiungere 100:

$$\min_{x,y} [w_x x + w_y y]$$
$$s.t.\quad xy = 100$$

Possiamo risolvere il problema con la Lagrangiana oppure imporre che il SMST sia uguale al rapporto del costo dei fattori:

$$\frac{MP_x}{MP_y} = \frac{w_x}{w_y}$$
$$xy = 100$$

$$\frac{y}{x} = \frac{w_x}{w_y} \rightarrow w_y y = w_x x$$
$$xy = 100$$

$$\frac{y}{x} = \frac{w_x}{w_y} \rightarrow w_y y = w_x x$$
$$xy = 100$$

$$w_y y^2 = w_x 100$$

$$x = 10\sqrt{\frac{w_y}{w_x}}$$
$$y = 10\sqrt{\frac{w_x}{w_y}}$$

b) La funzione di costo.

$$C = w_x x + w_y y = w_x 10\sqrt{\frac{w_y}{w_x}} + w_y 10\sqrt{\frac{w_x}{w_y}}$$
$$= 20\left[\sqrt{w_x}\sqrt{w_y}\right]$$

c) Se decidesse di produrre 400 la funzione di costo sarebbe

$$C = 40\left[\sqrt{w_x}\sqrt{w_y}\right]$$

c) Se i costi sono unitari abbiamo

$$C = 20 \text{ per produrre } 100$$

Quindi

$$AV = \frac{1}{5}$$

E nell'altro caso

$$C = 40 \text{ per produrre } 400$$

$$AV = \frac{1}{10}$$

Inoltre poichè la funzione di costo generale è

$$C = 2\sqrt{q}\left[\sqrt{w_x}\sqrt{w_y}\right]$$

da cui

$$MC = \frac{dC}{dq} = \frac{\left[\sqrt{w_x}\sqrt{w_y}\right]}{\sqrt{q}}$$

e per le varie produzioni:

$$MC(100) = \frac{1}{10}$$
$$MC(400) = \frac{1}{20}$$

d) La coerenza sta nel fatto che la fuzione di produzione ha rendimenti di scale crescenti quindi mi aspetto costi marginali e medi decrescenti (economie di scala), come di fatto avviene.

ES 3

a) Le imprese sono simmetriche quindi studiamo una sola impresa. Il profitto dell'impresa 1 è:

$$\pi_1 = (1000 - q_1 - q_2)q_1 - 100q_1$$

La condizione di primo ordine è:

$$1000 - 2q_1 - q_2 - 100 = 0$$
$$q_1 = \frac{900}{2} - \frac{q_2}{2}$$

Questa è la funzione di reazione dell'impresa uno. Ponendo $q_1 = q_2$ otteniamo

$$q_1 = q_2 = 300$$
$$p = 400$$

b) In questo caso abbiamo:

$$\pi_1 = (1000 - q_1 - (q_2 + q_3))q_1 - 100q_1$$
$$\pi_{23} = (1000 - q_1 - (q_2 + q_3))(q_2 + q_3) - 100(q_2 + q_3)$$

Se indichiamo con $q_{23} = q_2 + q_3$ il sistema si riduce a:

$$\pi_1 = (1000 - q_1 - q_{23})q_1 - 100q_1$$
$$\pi_{2,3} = (1000 - q_1 - q_{23})q_{23} - 100q_{23}$$

Possiamo trattare q_{23} come una sola impresa quindi la soluzione è uguale al caso precedente dove:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{23} = 300 \\ p &= 400 \end{aligned}$$

Inoltre le imprese 2 e 3 si dividono un mercato pari a 300:

$$q_2 = q_3 = 150$$

c) In questo caso l'impresa 1 che è follower avrebbe come funzione di reazione:

$$q_1 = \frac{900}{2} - \frac{q_{23}}{2}$$

mentre il profitto delle imprese che colloduno è:

$$\begin{aligned} \pi_{2,3} &= (1000 - q_1 - q_{23})q_{23} - 100q_{23} \\ &= (1000 - \frac{900}{2} + \frac{q_{23}}{2} - q_{23})q_{23} - 100q_{23} \\ &= 450q_{23} - \frac{q_{23}^2}{2} \end{aligned}$$

Da cui la condizione di primo ordine per trovare q_{23} è:

$$q_{23} = 450 \rightarrow q_2 = q_3 = 225$$

mentre

$$q_1 = \frac{900}{2} - \frac{q_{23}}{2} = 337.5$$

e il prezzo

$$p = 212.5$$

ES 4

a) La funzione di domanda aggregata è la somma orizzontale delle funzioni di domanda. Si noti che se il prezzo è superiore $p > 14$ il secondo gruppo non consuma mentre il primo gruppo non consuma se il prezzo è superiore a $p > 20$. Quindi partendo dal primo gruppo sappiamo che la domanda sarà $D(p) = 0$ se $p > 20$. Inoltre se il prezzo è tra 20 e 14 solo il primo gruppo consuma $D(p) = D_1(p) = 5000(20 - p)$ se $14 < p \leq 20$. Infine abbiamo:

$$D(p) = \begin{cases} 5000(20-p) + 10000(14-p) & \text{se} \quad 0 \leq p \leq 14 \\ 5000(20-p) & \text{se} \quad 14 < p \leq 20 \\ 0 & \text{se} \quad p > 20 \end{cases}$$

b) L'equilibrio si trova quando $D(p) = S(p)$.
Nell'intervallo $14 < p \leq 20$ abbiamo:

$$\begin{aligned} 5000(20-p) &= 5000p \\ 20-p &= p \\ &\quad \text{Non c'e' equilibrio} \end{aligned}$$

Quindi rimane l'intervallo $0 \leq p \leq 14$

$$\begin{aligned} 5000(20-p) + 10000(14-p) &= 5000p \\ (20-p) + 2(14-p) &= p \\ 48 &= 4p \\ p &= 12 \end{aligned}$$