Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola:

Scritto del 14/9/2023

Esercizio 1 (10 punti) In $\mathbb{R}^2$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = y^2(x-y)dx + x^2(x+y)dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$. Sugg.: Teorema della divergenza.

Risposte: i) ω esatta si/no no	ii) $I = + \frac{3}{2}\pi$

Esercizio 2 (10 punti) Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2y^2 - z^4 = 0\}.$$

i) Determinare il piú piccolo insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^3$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$.

ii) Per $R > 0$ si consideri la porzione di insieme

$$M_R = \{(x, y, z) \in M : |x| < R,\ |y| < R\}.$$

Calcolare l'area $\mathscr{H}^2(M_R)$.

Risposte: i) $C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : xy=0\}$	ii) $\mathscr{H}^2(M_R) = 32/3 \cdot \sqrt{2}\, R^2$

Esercizio 3 (10 punti) Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria e per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_S \frac{x(x-\alpha) + y^2}{(x-\alpha)^2 + y^2} d\mathscr{H}^1.$$

i) Calcolare I_α per $\alpha = 1$.

ii) Calcolare I_α per $\alpha > 1$.

iii) (Facoltativo) Verificare che $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0, 1)$.

Risposte: i) $I_1 = \pi$	ii) $I_\alpha = 0$	per $\alpha > 1$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio In $\mathbb{R}^2$ si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = y^2(x-y)\,dx + x^2(x+y)\,dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega$$

dove $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0,2\pi]$. Sugg.: Formula di Gauss-Green - Teorema della divergenza.

Risoluzione i) Controlliamo se ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2(x-y)\right) = 2y(x-y) - y^2 = 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2(x+y)\right) = 2x(x+y) + x^2 = 2xy + 3x^2.$$

Siccome $3x^2 \neq -3y^2$ su $\mathbb{R}^2$, la forma non è chiusa e dunque neppure esatta.

ii) Abbiamo $\omega = P\,dx + Q\,dy$ con $P = y^2(x-y)$ e $Q = x^2(x+y)$. Per la formula di Gauss-Green

$$\int_\gamma \omega = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \operatorname{div}(Q, -P)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(+x^3 + x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2x - y^3\right)\right] dx\,dy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left[+3x^2 + \cancel{2xy} - \cancel{2xy} + 3y^2 \right] dx\,dy$$

$$= +3 \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left[x^2+y^2 \right] dx\,dy = \text{[Coordinate polari]}$$

$$= +3 \cdot 2\pi \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr = +6\pi \cdot \frac{1}{4} = +\frac{3}{2}\pi,$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^3$

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; 4x^2y^2 - z^4 = 0 \} .$$

i) Determinare il più piccolo insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^3$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di classe C^∞.

ii) Per $R>0$ si consideri la porzione di insieme

$$M_R = \{ (x,y,z) \in M \, : \; |x| < R \text{ e } |y| < R \},$$

Calcolare l'area $\mathcal{H}^2(M_R)$.

Risoluzione i) Una funzione definente per M è $f(x,y,z) = 4x^2y^2 - z^4$. Il suo gradiente è

$$\nabla f(x,y,z) = \left(8xy^2, \; 8x^2y, \; -4z^3 \right).$$

L'equazione (sistema) $\nabla f = 0$ fornisce $z=0$ e $x \cdot y = 0$.
Dunque

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \cdot y = 0 \;\; \text{e} \;\; z = 0 \}$$

ed $M \setminus C$ è una sottovarietà di classe C^∞.
C è l'unione dell'asse x e dell'asse y.
L'equazione $f(x,y,z) = 0$ si esplicita in z:

$$z = \pm \sqrt{2\,|x \cdot y|}$$

In effetti su C si "toccano" da sopra e da sotto due distinti grafici. M non è regolare qui.

ii) Posto $Q_R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R \text{ e } |y| < R \}$, e $g : Q_R \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = +\sqrt{2|xy|}$, per la formula dell'area di grafici e per simmetria si ha

$$H^2(M_R) = 2 \int_{Q_R} \sqrt{1 + |\nabla g(x,y)|^2}\, dx\,dy .$$

Ancora per simmetria

$$\int_{Q_R} \sqrt{1+|\nabla g(x,y)|^2}\, dx\,dy = 4 \int_{\left\{ \substack{0<x<R \\ 0<y<R} \right\}} \sqrt{1+|\nabla g(x,y)|^2}\, dx\,dy .$$

Per $x>0$ ed $y>0$ si ha

$$\nabla g(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2xy}} \cdot \cancel{2}\, (y, x)$$

e dunque

$$1 + |\nabla g(x,y)|^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{(x+y)^2}{2xy} .$$

In definitiva troviamo

$$H^2(M_R) = 8 \int_{\left\{ \substack{0<x<R, \\ 0<y<R} \right\}} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dx\,dy$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_0^R \int_0^R \left[\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right] dx\,dy$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2}} \int_0^R \int_0^R \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\, dx\,dy$$

$$H^2(M_R) = \frac{16}{\sqrt{2}} \left(\int_0^R \sqrt{x}\, dx \right) \left(\int_0^R \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy \right)$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} \cdot 2 R^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{64}{3 \cdot \sqrt{2}} R^2,$$

$$= \frac{32}{3} \sqrt{2}\, R^2,$$

$\square$

Per l'Esercizio 3 vedi Esame di Luglio 2023