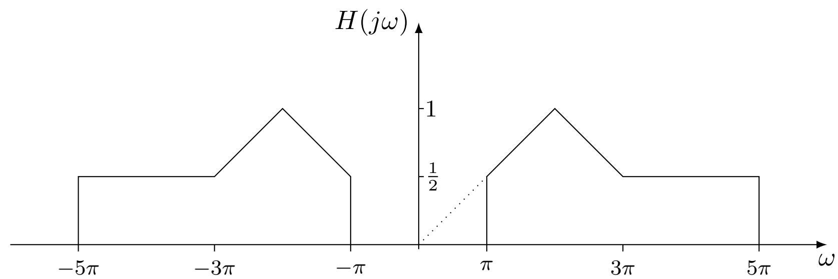
COGNOME:..
NOME:..
MATRICOLA:.....................................

SEGNALI E SISTEMI
Terzo Appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
5 SETTEMBRE 2023
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Si consideri un sistema LTI con risposta in frequenza $H(j\omega)$ illustrata in figura.



1. Dire se il filtro in questione è reale [1 punto]
2. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ [5 punti]
3. Calcolare l'area A_h della risposta impulsiva [1 punto].

Soluzione

1. Il filtro è reale e pari, in quanto $H(j\omega)$ ha simmetria reale e pari.
2. Da
$$H(j\omega) = \tfrac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\tfrac{\omega-3\pi}{4\pi}\right) + \tfrac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\tfrac{\omega+3\pi}{4\pi}\right) + \tfrac{1}{2}\mathrm{triang}\left(\tfrac{\omega-2\pi}{\pi}\right) + \tfrac{1}{2}\mathrm{triang}\left(\tfrac{\omega+2\pi}{\pi}\right)$$
e ricordando le coppie segnale-trasformata
$$\begin{aligned} x(t)\cos(\omega_0 t) \quad &\Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}X(j\omega-\omega_0) + \tfrac{1}{2}X(j\omega+\omega_0) \\ 2\mathrm{sinc}(2t) \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi}) \\ \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{t}{2}) \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{\pi}) \end{aligned}$$
si ottiene
$$h(t) = 2\,\mathrm{sinc}(2t)\cos(3\pi t) + \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{t}{2})\cos(2\pi t)$$
3. Per la regola dell'area si ha $A_h = H(j0) = 0$.

Esercizio 2 – [punti 7]

Si consideri un sistema continuo
definito da equazioni differenziali la cui funzione di trasferimento sia

$$H(s) = \frac{1-s}{(s+3)(s+2)} \ .$$

Si chiede di:

1. Scrivere l'equazione differenziale associata al sistema [1 punto]

2. Dire se il sistema è BIBO stabile [1 punto]

3. Identificare l'ingresso al sistema se la risposta forzata è [3 punti]

$$Y_f(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+2)}$$

4. Identificare la risposta impulsiva $h(t)$ associata al sistema [2 punti]

Soluzione

1. Avendo
$$H(s) = \frac{1-s}{s^2+5s+6}$$
l'equazione differenziale risulta $x(t) - x'(t) = 6y(t) + 5y'(t) + y''(t)$.

2. I poli del sistema sono $p_1 = -2$ e $p_2 = -3$, entrambi con parte reale negativa, e pertanto il sistema è BIBO stabile.

3. Si ha
$$X(s) = \frac{Y_f(s)}{H(s)} = \frac{1+s}{1-s} = -1 - \frac{2}{s-1}$$
e quindi
$$x(t) = -\delta(t) - 2e^t 1(t)$$

4. Tramite scomposizione ai fattori semplici otteniamo
$$H(s) = \frac{1-s}{(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \ , \qquad A = 3, B = -4$$
e pertanto
$$h(t) = 3e^{-2t}1(t) - 4e^{-3t}1(t)$$

Esercizio 3 – [punti 7]

Dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k) \cos(k)$$

1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante, BIBO stabile e motivare le risposte [5 punti].

2. Trovare la risposta impulsiva [2 punti].

Soluzione

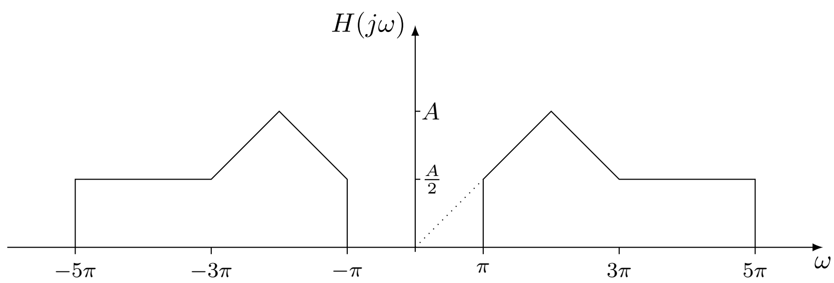
1. $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cos(k) \mathbf{1}(n + 1 - k) = [x(n) \cos(n)] * \mathbf{1}(n + 1)$$

   Per cui il sistema non è statico, è limeare ma non è LTI a causa della moltiplicazione per $\cos(n)$, per cui non è tempo invariante, non è causale poichè utilizza l'informazione $x(n + 1)$, non è BIBO stabile poichè con ingresso $x(n) = \cos(n)$ si ha $x(n)\cos(n) = \cos^2(n)$ e pertanto stiamo sommando termini tutti positivi che fanno divergere il segnale.

2. Si ha $h(n) = [\delta(n) \cos(n)] * \mathbf{1}(n + 1) = \delta(n) * \mathbf{1}(n + 1) = \mathbf{1}(n + 1)$.

Esercizio 4 – [punti 3]

Si consideri un sistema LTI con risposta in frequenza $H(j\omega)$ illustrata in figura.



Calcolare l'uscita del sistema con ingresso $x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - 4\sin(3\pi t) + 2\cos(4\pi t)$

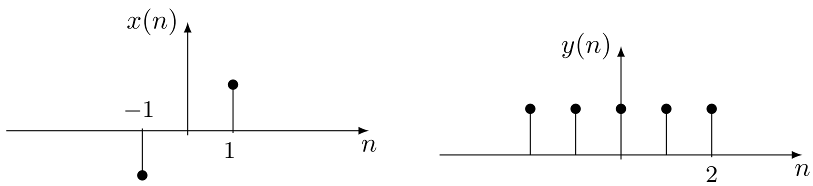
Soluzione Il filtro è reale e pari, in quanto $H(j\omega)$ ha simmetria reale e pari, a valori reali positivi e fase nulla. Pertanto l'uscita è

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2H(j0) + H(j2\pi)\cos(2\pi t) - 4H(j3\pi)\sin(3\pi t) + 2H(j4\pi)\cos(4\pi t) \\
&= A\cos(2\pi t) - 2A\sin(3\pi t) + A\cos(4\pi t)
\end{aligned}
$$

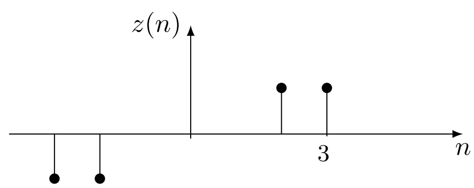
Esercizio 5 – [punti 3]

Dati i segnali a tempo discreto $x(n) = \delta(n-1) - \delta(n+1)$ e $y(n) = \mathrm{rect}(n/5)$, dopo aver disegnato i segnali, si chiede di calcolare e disegnare la convoluzione $z(n) = x * y(n)$

Soluzione Per i segnali abbiamo



La convoluzione quindi risulta $z(n) = y(n-1) - y(n+1)$, ovvero



Esercizio 6 – [punti 3]

Si consideri un segnale a tempo continuo $x(t)$ **reale** e **causale** e sia $X(j\omega)$ la sua trasformata di Fourier; si assuma che il vettore MatLab `X`, di lunghezza `N` (con `N` un numero pari), contenga i campioni di $X(j\omega)$ in corrispondenza delle pulsazioni ω=ω_0`*(-N/2:N/2-1)` in cui ω_0 sia dato e pertanto sia noto il passo di campionamento nel tempo `T = 2*pi/(N*`ω_0`)`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che calcoli numericamente il segnale $x(t)$ e i tempi associati, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
x = ifft(fftshift(X))/T; % antitrasformata di Fourier
t = (0:N-1)*T; % tempi associati ai campioni del segnale

plot(t,real(x)); % plot del segnale
```