Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 1/9/2023

Esercizio 1 (8 punti) Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione e si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (\varphi(x) + y^3)dx + (\varphi(y) - x^3)dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ per qualche funzione φ, ed eventualmente calcolarla.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Risposte: i) ω esatta per $\varphi =$ nessuna ii) $I =$ $-3\pi/2$

Esercizio 2 (12 punti) Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1,\ z^2 + w^2 = 1/4\}$$

e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z, w) = x + y^2 + z^3 + w^4$.

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$.

ii) Provare che esiste e calcolare il massimo di f ristretta ad M.

Risposte: i) M sottovarietà si/no ii) $\max_M f =$ $11/8$

Esercizio 3 (10 punti) In $\mathbb{R}^4$ usiamo le coordinate $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ e sia $A = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| > 1\}$. Dopo averne discusso la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_A \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{|x|^\alpha} dx.$$

Risposte: $I_\alpha =$ $2\pi^2/(\alpha-6)$ per $\alpha > 6$, altrimenti diverge.

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ e si consideri la 1-forma differenziale su $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (\phi(x) + y^3)\,dx + (\phi(y) - x^3)\,dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ per qualche ϕ ed eventualmente calcolarla.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega$$

dove $\gamma : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Risoluzione. i) Controlliamo se ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi(x) + y^3) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\phi(y) - x^3)$$

$$\Updownarrow$$

$$3y^2 = -3x^2 \quad \underline{\text{NON}} \text{ verificato.}$$

Dunque ω non è esatta per alcuna ϕ.

ii) Posto $P = \phi(x) + y^3$ e $Q = \phi(y) - x^3$ abbiamo $\omega = P\,dx + Q\,dy$ e per il Teorema della divergenza (Formula di Gauss-Green):

$$I = \int_\gamma \omega = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \operatorname{div}(Q, -P)\,dxdy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left(\partial_x(\phi(y) - x^3) + \partial_y(-\phi(x) - y^3)\right)dxdy$$

e dunque

$$I = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left(-3x^2 - 3y^2\right) dx\,dy = [\text{Coord. polari}]$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -6\pi \int_0^1 r^3\, dr = -\frac{6}{4}\pi \left[r^4\right]_{r=0}^{r=1}$$

$$\boxed{I = -\frac{3}{2}\pi,}$$

Conto alternativo. La 1-forma $\phi(x)dx + \phi(y)dy$ è esatta. Dunque

$$I = \int_\gamma \omega = \int_\gamma y^3 dx - x^3 dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t)\, dt.$$

Osserviamo che $\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt$, per traslazione di $\pi/2$. Per parti

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot \sin t\, dt =$$

$$= \left[\sin^3 t\,(-\cos t)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 3 \sin^2 t \cos^2 t\, dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin^4 t)\, dt$$

e quindi $\quad 4\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = 3\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt.$

Infine

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin t \, \sin t \, dt = \left[-\cos t \sin t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\, dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt$$

da cui $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi$,

Tornando sopra: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt = \frac{3}{4}\pi$ e

infine

$$I = -\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

$\square$

Esercizio Sia $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 ;\ x^2+y^2 = 1 \ \text{e}\ z^2+w^2 = 1/4\}$ e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z,w) = x+y^2+z^3+w^4$.

i) Provare che M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$.

ii) Calcolare il massimo di f ristretta su M.

Risoluzione. i) Sia $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ $\quad (h \in C^\infty(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}^2))$

$$h(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ z^2+w^2-1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x,y,z,w) \\ h_2(x,y,z,w) \end{pmatrix}$$

Allora

$$M = \{(x,y,z,w) : h(x,y,z,w) = 0\}.$$

Controlliamo l'ipotesi di rango massimo. La matrice Jacobiana di h è

$$Jh(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

Su M si ha $(x,y) \neq (0,0)$ e $(z,w) \neq (0,0)$. Quindi le due righe di Jh sono linearmente indipendenti su M. Dunque $rg(Jh) = 2$ su M.

Concludiamo che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

ii) L'insieme M è chiuso e limitato ($|x|, |y|, |z|, |w| \leq 1$ su M). Quindi M è compatto ed f assume massimo su M (Weierstrass). Cerchiamo il punto di massimo con i moltiplicatori di Lagrange: esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che il punto di massimo $(x,y,z,w) \in M$ verifica

$$\nabla f(x,y,z,w) = \lambda \nabla h_1(x,y,z,w) + \mu \nabla h_2(x,y,z,w).$$

Il sistema è:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x & \Rightarrow \quad \lambda \neq 0 \ \text{ e } \ x \neq 0 \\ 2y = 2\lambda y & \Rightarrow \quad y = 0 \ \text{ oppure } \ \lambda = 1 \\ 3z^2 = 2\mu z & \Rightarrow \quad z = 0 \ \text{ oppure } \ 3z = 2\mu \\ 4w^3 = 2\mu w & \Rightarrow \quad w = 0 \ \text{ oppure } \ 4w^2 = 2\mu \end{cases}$$

Tenuto conto che $x^2+y^2 = 1$, le prime due equazioni hanno le soluzioni

$$(x,y) = (\pm 1, 0), \ \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

La somma $x+y^2$ vale in questi punti:

$$\pm 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \leftarrow \text{valore massimo.}$$

Tenuto conto che $z^2+w^2 = 1/4$, la terza e quarta equazione hanno soluzioni

$$(z,w) = \left(\pm\frac{1}{2}, 0\right), \ (0, \pm 1/2)$$

a cui sono da aggiungere le soluzioni con $z \neq 0$ e $w \neq 0$.
In questo caso $3z = 2\mu = 4w^2$ ovvero $w^2 = \frac{3}{4}z$.
Sostituendolo in $z^2+w^2 = 1/4$ si trova:

$$z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{4} = 0 \iff 4z^2+3z-1 = 0$$
$$\iff z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{-3\pm 5}{8}$$

e quindi $z = -1, 1/4$. Il caso $z = -1$ porta a $w^2 = -\frac{3}{4}$ che non ha soluzione. Per $z = 1/4$ si trova $w = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.
Nei punti $(\pm 1/2, 0)$, $(0, \pm 1/2)$, $\left(1/4, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ la somma z^3+w^4 assume i valori

$$\pm\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{64} + \frac{9}{256}$$

Il valore $+\frac{1}{8}$ è quello massimo. Dunque $\boxed{\max_M f = \frac{5}{4} + \frac{1}{8} = \frac{11}{8}}$ □

Esercizio In $\mathbb{R}^4$ usiamo le coordinate $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Dopo aver discusso la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_{\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| > 1\}} \frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}{|x|^\alpha} \, dx$$

Risoluzione. L'integranda è continua e non negativa. L'integrale è ben definito. Abbiamo

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{C} |x|^2.$$

Dunque

$$I_\alpha \leq C \int_{\{|x|>1\}} \frac{1}{|x|^{\alpha-2}} \, dx \overset{\text{Coarea}}{=} C \int_1^{+\infty} \int_{\{|x| = r\}} \frac{1}{|x|^{\alpha-2}} \, dH^3(x) \, dr =$$

$$= C \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\alpha-2}} H^3(\{|x| = r\}) \, dr$$

$$= C \cdot H^3(\{|x| = 1\}) \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-2}} r^3 \, dr$$

$$= C \cdot H^3(\{|x|=1\}) \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-5}} \, dr < \infty \iff \alpha > 6$$

Su $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ si ha $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \geq |x|^2$ e con un argomento\stima analogo al precedente si prova che: $\alpha \leq 6 \Rightarrow I_\alpha = +\infty$.

Supponiamo $\alpha > 6$. Per $i \neq j$ si ha

$$\int_{\{|x|>1\}} \frac{x_i x_j}{|x|^\alpha} \, dx = 0.$$

Lo si vede per simmetria col cambio di variabile $x_i \to -x_i$ e le altre coordinate rimangono fisse.

Quindi

$$I_\alpha = \int_{\{|x|>1\}} \frac{|x|^2}{|x|^\alpha}\, dx = [\text{come sopra}]$$

$$= H^3(\{|x|=1\}) \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-5}}\, dr$$

$$= \underbrace{H^3(\{|x|=1\})}_{\substack{\parallel \\ S^3}} \frac{1}{\alpha-6},$$

Sappiamo che $H^3(S^3) = 4\, \mathcal{L}^4(\{|x|<1\}) = 4\,\omega_4$

con

$$\omega_4 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\Bigg|_{n=4} = \frac{\pi^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{2!}.$$

Quindi

$$\boxed{I_\alpha = \frac{2\pi^2}{\alpha-6}},$$

Un conto alternativo si può fare usando ripetutamente le coordinate polari. Poniamo

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \rho\cos\phi \\ x_4 = \rho\sin\phi \end{cases}. \qquad \begin{matrix} r,\rho>0 \\ \theta,\phi\in[0,2\pi) \end{matrix}$$

Si trova

$$I_\alpha = \int_{\{|x|>1\}} |x|^{2-\alpha}\, dx = (2\pi)^2 \int_{\{r^2+\rho^2>1,\ r>0 \text{ e } \rho>0\}} (r^2+\rho^2)^{\frac{2-\alpha}{2}}\, r\rho\, dr\, d\rho.$$

Ora facciamo di nuovo un cambiamento di variabile con coordinate polari:

$$\begin{cases} r = s\cos\psi \\ \rho = s\sin\psi \end{cases}$$

$s > 1$
e $\psi \in (0, \pi/2)$
(Primo quadrante).
perché $r, \rho > 0$

Si trova

$$I_\alpha = (2\pi)^2 \int_0^{\pi/2} \int_1^{+\infty} s^{2-\alpha} \cdot s^2 \cos\psi \sin\psi \; s\, ds\, d\psi$$

$$= 4\pi^2 \left(\int_0^{\pi/2} \cos\psi \sin\psi \, d\psi \right) \left(\int_1^{\infty} s^{5-\alpha} \, ds \right)$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha - 6} = \frac{2\pi^2}{\alpha - 6}.$$

$\square$