Diario delle lezioni

Fondamenti di algebra lineare e geometria
Ingegneria dell'energia — Ingegneria meccanica

A.A. 2023-2024

Cristiana Bertolin, Lorenzo Martini

Lezione 1

Generalità sul corso. Applicazioni insiemistiche, applicazioni iniettive e suriettive. Composizione di applicazioni. Prodotto cartesiano di insiemi. Equazioni polinomiali in una indeterminata a coefficienti reali.

Lezione 2

Numeri complessi. Definizione dell'insieme $\mathbb{C}$. Somma e prodotto di numeri complessi. Proprietà di addizione e moltiplicazione in $\mathbb{C}$. Inverso di un numero complesso non nullo. Rappresentazioni cartesiana, algebrica e trigonometrica di un numero complesso. Formule di De Moivre per le potenze di un numero complesso.

Lezione 3

Radici n-esime di un numero complesso. Formula di De Moivre per le radici. Teorema fondamentale e teorema di Ruffini. Coniugato di un numero complesso. Proprietà del coniugio. Esercizi.

Lezione 4

Sistemi lineari. Definizioni di equazione lineare e sistemi di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{R}$. Matrici rettangolari ad entrate in $\mathbb{R}$. Matrici incompleta e completa dei coefficienti di un sistema lineare. Somma e prodotto tra matrici. Rappresentazione matriciale di un sistema lineare. Soluzioni di un sistema lineare. Sistemi compatibili, sistemi equivalenti. Definizione di matrice a scala.

Lezione 5

Metodo di eliminazione di Gauss per la risoluzione di un sistema lineare. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Ogni matrice può essere ridotta in forma a scala tramite operazioni elementari sulle proprie righe. Esempi del metodo di eliminazione di Gauss. Compatibilità di un sistema lineare.

Lezione 6

Calcolo matriciale. Proprietà della somma e del prodotto tra matrici. Matrici quadrate, matrice identità e matrici invertibili. Relazione tra matrici invertibili e compatibilità del sistema lineare associato. Trasposta di una matrice e sue proprietà.

Lezione 7

Matrici elementari. Una forma a scala di una matrice si ottiene premoltiplicando quest'ultima per opportune matrici elementari. Una matrice è invertibile se e solo se una sua forma a scala è la matrice identità. Esempi ed esercizi sul calcolo della forma a scala di una matrice. Esempi ed esercizi sul calcolo dell'inversa di una matrice invertibile.

Lezione 8

Spazi vettoriali. La struttura di spazio vettoriale di $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Definizione di campo. Esempi di campo. Definizione di spazio vettoriale sopra un campo. Esempi di spazi vettoriali. Polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo. Prime proprietà di uno spazio vettoriale.

Lezione 9

Combinazioni lineari di vettori. Dipendenza e indipendenza lineari di vettori. Interpretazione geometrica nel caso di uno o due vettori. Sottospazi vettoriali. Ogni sottospazio vettoriale contiene sempre il vettore nullo. Esempi.

Lezione 10

Intersezione ed unione di sottospazi vettoriali.Sottospazio vettoriale generato da un insieme, sua caratterizzazione. Somma di sottospazi vettoriali, sua caratterizzazione. Insiemi di generatori di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali finitamente generati. Esempi. Base di uno spazio vettoriale. Data una base, ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base. Esempi.

Lezione 11

Caratterizzazione della base di uno spazio vettoriale. Lemma dello scambio. Ogni insieme di generatori contiene una base. Ogni insieme linearmente indipendente può essere completato ad una base. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Esempi.

Lezione 12

Sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, determinazione della loro dimensione e di una base. Esempi. Rango per colonna e per riga di una matrice. I ranghi per colonna e per riga coincidono. Il rango coincide col numero di pivot di una forma a scala. Una matrice è invertibile se e solo se ha rango massimo. Teorema di Binet. Esempi ed esercizi.

Lezione 13

Forme parametrica e cartesiana di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Esempi ed esercizi.

Lezione 14

Forme parametrica e cartesiana di intersezione e somma di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Esempi. Formula di Grassmann. Somma diretta di sottospazi vettoriali.

Lezione 15

Applicazioni lineari. Definizione, proprietà ed esempi. Isomorfismi lineari. Ogni $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo in modo non canonico a $\mathbb{K}^n$. Coordinate dei vettori di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Rappresentazione matriciale di una applicazione lineare.

Lezione 16

Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se ha nucleo banale. L'immagine coincide con lo spazio delle colonne di una matrice rappresentativa. Immagini inverse. Relazione tra applicazioni lineari e sistemi lineari. Teorema di nullità + rango. Un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato è iniettivo se e solo se è suriettivo.

Lezione 17

Cambiamenti di base e loro matrici. Matrici equivalenti. Matrici simili. Esempi.

Lezione 18

Determinante. Introduzione alle funzioni determinanti. Definizione. Prime proprietà sulle matrici elementari. Unicità della funzione determinante. Una matrice è invertibile se e solo se ha determinante diverso da zero. Calcolo del determinante con il metodo di eliminazione di Gauss. Teorema di Binet. Esistenza della funzione determinante. Formule di Laplace per lo sviluppo del determinante. Esempi ed applicazioni: matrici dei cofattori, regola di Cramer.