COGNOME:...
NOME:...
MATRICOLA:.....................................

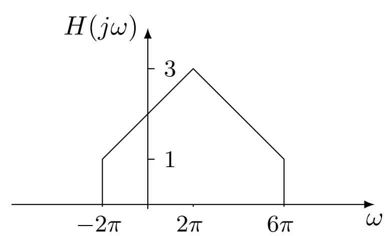
SEGNALI E SISTEMI
Secondo Appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
13 LUGLIO 2023
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Sia dato il segnale

$$x(t) = \cos(\pi t) + 2e^{-j8\pi t}$$

in ingresso ad un filtro con risposta in pulsazione $H(j\omega)$ illustrata in figura.



1. Dire se il filtro in questione è reale [1 punto]
2. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ [3 punti]
3. Calcolare l'uscita $y(t)$ del filtro [3 punti]

Soluzione

1. Il filtro non è reale, in quanto $H(j\omega)$ non ha simmetria hermitiana.
2. Da
$$H(j\omega) = \text{rect}((\omega - 2\pi)/(8\pi)) + 2\text{triangle}((\omega - 2\pi)/(4\pi))$$
si ottiene
$$h(t) = (4\text{sinc}(4t) + 4\text{sinc}^2(2t))e^{j2\pi t}$$
3. Il filtro è attivo tra -2π e 6π, pertanto del segnale
$$x(t) = \tfrac{1}{2}e^{j\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\pi t} + 2e^{-j8\pi t}$$
modifica i primi due contributi ed elimina il terzo, ovvero
$$y(t) = \tfrac{5}{4}e^{j\pi t} + \tfrac{3}{4}e^{-j\pi t}$$

Esercizio 2 – [punti 7]

Dato il sistema LTI a tempo discreto, con risposta impulsiva:

$$h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 1(n) - 4a^n \cdot 1(n)$$

con $a \in R$

1. Trovare l'equazione alle differenze associata al sistema [2 punti].
2. Dire per quali valore di a il sistema è BIBO stabile e giustificare la risposta [2 punti]
3. trovare l'uscita forzata del sistema quando $x(n) = 1(n)$, nel caso $a = -2$ [3 punti].

Soluzione

1. Si calcola prima la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{4}{1-az^{-1}} = \frac{1-az^{-1}-4+z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-az^{-1})} \\ &= \frac{-3+(1-a)z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-az^{-1})} = \frac{-3+(1-a)z^{-1}}{1-(a+\frac{1}{4})z^{-1}+\frac{a}{4}z^{-2}} \end{aligned}$$

   da cui per ispezione:

$$y(n) - (a+\tfrac{1}{4})y(n-1) + \tfrac{a}{4}y(n-2) = -3x(n) + (1-a)x(n-1)$$

2. I poli della funzione di trasferimento sono in $z = \frac{1}{4}$ (polo stabile) e $z = a$, perciò il sisitema è BIBO stabile per $|a| < 1$.

3. Abbiamo

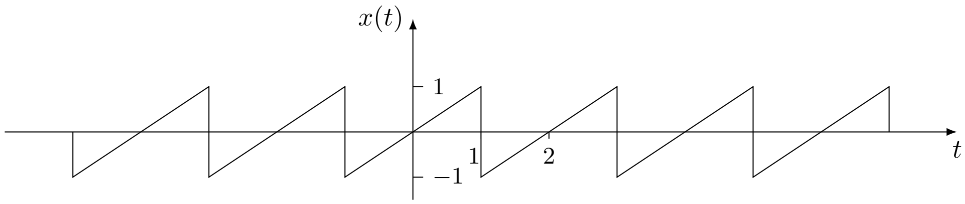
$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) \\ &= \frac{-3+3z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+2z^{-1})} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{-3}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+2z^{-1})} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{8}{3}\frac{1}{1+2z^{-1}} \end{aligned}$$

   da cui

$$y(n) = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n 1(n) - \tfrac{8}{3}(-2)^n 1(n)$$

Esercizio 3 – [punti 7]

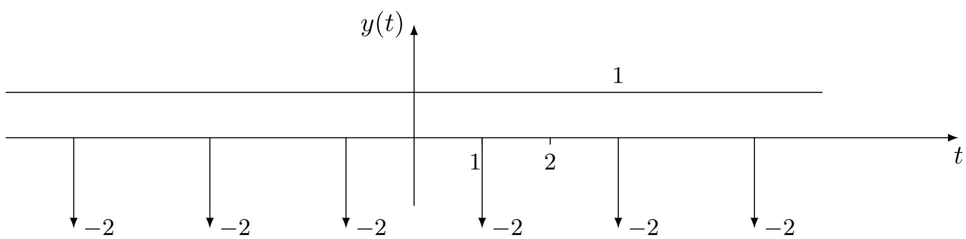
Sia dato il segnale periodico illustrato in figura.



1. Calcolare i coefficienti X_k della serie di Fourier [4 punti].
2. Trovare i coefficienti del segnale $z(t) = x(t)e^{j3\pi t}$[2 punti].
3. Dire di che simmetria godono i segnali $x(t)$ e X_k [1 punto].

Soluzione

1. Conviene procedere per derivazione, in cui il segnale derivata $y(t) = x'(t) = 1 - 2\text{comb}_2(t-1)$ è illustrato in figura,



   i cui coefficienti sono

$$Y_k = \delta(k) - e^{-jk\omega_0}\ , \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \pi$$
$$= \begin{cases} 0 & k = 0 \\ -1 & k \text{ pari} \neq 0 \\ 1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

   e pertanto

$$X_k = \begin{cases} \frac{Y_k}{jk\omega_0} & k \neq 0 \\ m_x = 0 & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{j}{k\pi} & k \text{ pari} \neq 0 \\ \frac{-j}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

2.
$$Z_k = X_{k-3}$$

3. $x(t)$ è reale dispari, pertanto X_k è puramente immaginario e dispari.

Esercizio 4 – [punti 3]

Dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione

$$y(n) = x(n+2) + \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)\cos(k)$$

1. dire se è lineare e tempo-invariante [2 punti] e
2. trovare la risposta impulsiva [1 punto].

Soluzione

1. Il sistema è lineare, mentre non è tempo invariante, infatti

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n+2) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cos(k) 1(n+1-k) \\ &= x(n+2) + [x(n)\cos(n)] * 1(n+1) \end{aligned}$$

   in cui la moltiplicazione per $\cos(n)$ implica la tempo varianza.

2. Dal risultato appena trovato, per la proprietà rivelatrice del delta, si ha

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n+2) + [\delta(n)\cos(n)] * 1(n+1) \\ &= \delta(n+2) + [\delta(n)] * 1(n+1) \\ &= \delta(n+2) + 1(n+1) \\ &= 1(n+2) \end{aligned}$$

Esercizio 5 – [punti 3]

Sia dato il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(t/5)e^{j\frac{\pi}{5}t}$. Dopo aver identificato la banda del segnale, si chiede di proporre uno schema di campionamento/interpolazione in banda base in grado di ricostruire esattamente il segnale dai propri campioni, specificando il passo di campionamento minimo T che garantisca la ricostruibilità.

Soluzione La trasformata di Fourier del segnale è

$$X(j\omega) = 5\,\mathrm{rect}(\tfrac{5}{2\pi}(\omega - \tfrac{\pi}{5}))$$

con estensione in pulsazione $[0, \omega_c]$, $\omega_c = \frac{2\pi}{5}$. Pertanto $\omega_c = 2\pi B$ con $B = \frac{1}{5}$ ed il segnale é perfettamente ricostruibile dai propri campioni scegliendo un passo di campionamento $T < \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{5}{2}$. Lo schema di ricostruzione è

$$x(t) = \sum_k x(kT)\mathrm{sinc}((t - kT)/T)\ .$$

Esercizio 6 – [punti 3]

Si considerino i segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y`, con rispettivi tempi di campionamento `tx` e `ty` e con passo di campionamento comune `T` scelto opportunamente.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per calcolare e poi disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
tz = tx(1)+ty(1):T:tx(end)+ty(end); % regola di estensione della conv.
z = T*conv(x,y); % operazione di convoluzione

plot(tz,z); % plot della convoluzione
```