Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola:

Scritto del 26/6/2023

Esercizio 1 (10 punti) Si considerino la curva $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(\sin(t), 2\cos(t) - 1\big), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

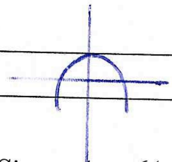
e la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, \quad x^2+y^2 \neq 0.$$

i) Disegnare il supporto di γ.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega.$$

Risposte: i) Disegno: 	ii) $I =$ $\frac{3}{2}\pi$

Esercizio 2 (10 punti) Siano $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2+z^2 < 1\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, \qquad (x,y,z) \in A,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \in L^1(A)$.

ii) Per α come al punto precedente, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_A f(x,y,z)dxdydz.$$

Risposte: i) $f \in L^1(A)$ per $\alpha \in$ $(-\infty, \frac{5}{2})$	ii) $I_\alpha =$ $4\pi/(5-2\alpha)$

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri l'insieme

$$M = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{1+x^2+y^2} - xy = \frac{1}{2}\Big\}.$$

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

ii) Posto $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$, $R > 0$, calcolare

$$R_0 = \max\{R > 0 : M \cap D_R = \emptyset\}.$$

Risposte: i) M sottovarietà si/no sì	ii) $R_0 =$ $\sqrt{\sqrt{2}-1}$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Si consideri la curva $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

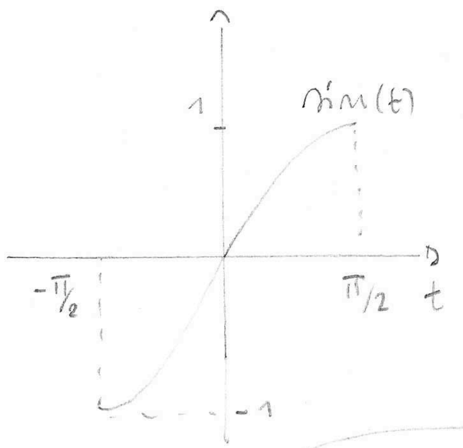
$$\gamma(t) = \left(\sin(t), \; 2\cos(t) - 1 \right), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

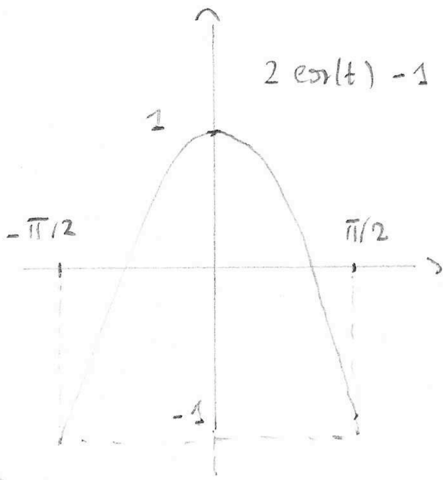
i) Disegnare il supporto di γ

ii) Calcolare l'integrale

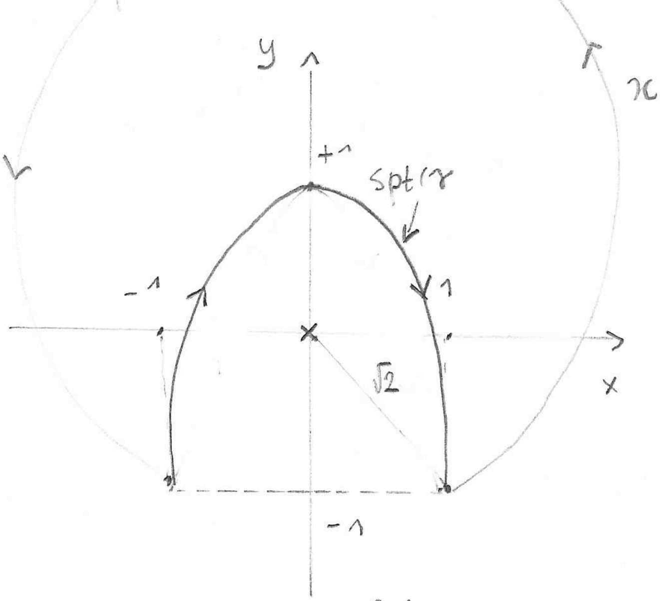
$$I = \int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy .$$

Risoluzione. Le coordinate di γ sono:





Quindi, nel piano xy:



mezza ellisse

La forma differenziale $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$

è chiusa e dunque esatta in $\mathbb{R}^2$ tolto l'asse y negativo.

Detta $\gamma_6 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_6(t) = \sqrt{2}\,(\cos t, \sin t)$

si ha $\displaystyle\int_{\gamma+\gamma_6} \omega = 0$ e dunque

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma_6} \omega = \int_{-\pi/4}^{5/4\pi} \left\{ \frac{-\sqrt{2}\sin t}{2}\sqrt{2}\,(-\sin t) + \frac{\sqrt{2}\cos t}{2}\sqrt{2}\cos t \right\} dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{5/4\pi} 1\,dt = \left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)\pi = +\frac{3}{2}\pi.$$

Conto alternativo: un potenziale di ω per $x \neq 0$ è

$$f(x,y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

Dette $\gamma^- = \gamma_{|[-\pi/2,0]}$ e $\gamma^+ = \gamma_{|[0,\pi/2]}$ si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma^-} \omega + \int_{\gamma^+} \omega$$

$$= f(0^-,1) - f(-1,-1) + f(1,-1) - f(0^+,1)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

$\square$

Esercizio Siano $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2+z^2 < 1\}$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Calcolare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \in L^1(A)$.

ii) Calcolare per tali α l'integrale

$$I_\alpha = \int_A f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz\,,$$

Risoluzione. i) Abbiamo

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \\ &\leq x^2+y^2+z^2 + x^2+y^2 + x^2+z^2 + y^2+z^2 \\ &= 3(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I_\alpha &\leq 3 \int_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}\, dx\,dy\,dz \\ &= 3 \int_0^1 \left(\int_{\{x^2+y^2+z^2=r^2\}} \frac{1}{r^{2(\alpha-1)}}\, d\mathcal{H}^2 \right) dr \\ &= 3 \int_0^1 \frac{1}{r^{2(\alpha-1)}} \cdot r^2 \cdot 4\pi\, dr \\ &= 12\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-4}}\, dr < \infty \iff 2\alpha - 4 < 1 \\ &\qquad \iff \alpha < 5/2 \end{aligned}$$

Coarea oppure Coordinate sferiche

Questo prova che

$$\alpha < 5/2 \quad \Rightarrow \quad I_\alpha < \infty .$$

Posto $A^+ = \{ (x,y,z) \in A ;\ x>0,\ y>0,\ z>0 \}$

avremo

$$I_\alpha \geq \int_{A^+} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$$\geq \int_{A^+} \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\, dx\,dy\,dz \qquad \text{per simmetria}$$

$$= \frac{1}{8} \int_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}\, dx\,dy\,dz.$$

I conti precedenti mostrano che

$$\alpha \geq 5/2 \quad \Rightarrow \quad I_\alpha = +\infty .$$

ii) Osserviamo che (per $\alpha < 5/2$)

$$\int_A \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\, dx\,dy\,dz = 0 \qquad \text{per cambio di variabile } x \mapsto -x$$

Lo stesso con xz o yz al posto di xy.

Quindi

$$I_\alpha = \int_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}\, dx\,dy\,dz = 4\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-4}}\, dr$$

$$= 4\pi \left[\frac{r^{-2\alpha+5}}{5-2\alpha} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{5-2\alpha}$$

Conto alternativo con le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0<r<1 \\ &0<\theta<2\pi \\ &0<\varphi<\pi \end{aligned}$$

$$I_\alpha = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\varphi)^2}{r^{2\alpha}}\, r^2\sin\varphi \, d\varphi\, d\theta\, dr$$

dispari in θ / periodico $\to$ integrale $= 0$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 r^{4-2\alpha}\,dr\right)}_{\text{converge per } \alpha<\frac{5}{2}} \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(1+2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi+2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + 2\underbrace{\sin\theta}_{\text{dispari in }\theta}\sin\varphi\cos\varphi\Big)\sin\varphi \, d\theta\, d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{5-2\alpha}\left\{2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi + \underbrace{2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta}_{=0}\right\}$$

$$= \frac{4\pi}{5-2\alpha},$$

$\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^2$

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \frac{1}{1+x^2+y^2} - xy = \frac{1}{2} \right\}.$$

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

ii) Per $R>0$ si consideri $D_R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2 \}$.
Calcolare

$$R_0 = \max \{ R>0 : D_R \cap M = \emptyset \}.$$

Risoluzione. Una funzione definiente per M è

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} - xy - \frac{1}{2}.$$

Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Controlliamo l'ipotesi di rango massimo:

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} - y \\[2ex] f_y = \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)} - x. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema $\nabla f = 0$. L'equazione $x f_x - y f_y = 0$ fornisce

$$-2 \frac{x^2 - y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

e dunque $x = \pm y$. Nel caso $x = y$, $f_x = 0$ diventa

$$-x \left(\frac{2}{(1+2x^2)^2} + 1 \right) = 0 \iff x = 0$$

Tuttavia $(0,0) \notin M$. Nel caso $x = -y \neq 0$ si arriva a

$$\frac{2}{(1+2x^2)^2} - 1 = 0 \iff 2 = (1+2x^2)^2$$
$$\iff \sqrt{2} - 1 = 2x^2$$

e dunque $x_0 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ e $y_0 = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

In entrambi i casi si trova

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{1+\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \neq 0.$$

Dunque $(x_0, y_0) \notin M$.

Conclusione: M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ (curva).

ii) La funzione $g(x,y) = x^2+y^2$ assume minimo su M. Se infatti $D_R \cap M \neq \emptyset$ per un $R>0$, allora $\overline{D_R} \cap M \neq \emptyset$ è compatto e g ha minimo su tale insieme.

Possiamo usare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange: esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla g(x,y) = \lambda \nabla f(x,y)$$

nei punti di minimo. Ovvero

$$\begin{cases} 2x = \lambda\left(\dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} - y\right) \\[2ex] 2y = \lambda\left(\dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} - x\right) \end{cases}$$

Moltiplicando la prima riga per y, la seconda per x e sottraendole:

$$0 = \lambda\left(-y^2+x^2\right).$$

Il caso $\lambda=0$ implica $x=y=0$ (punto fuori da M).

Quindi deve essere $x = \pm y$. Nel caso $x=-y$

si trova

$$0 = f(x,-x) = \frac{1}{1+2x^2} + x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\iff \quad 1 = (1+2x^2)\left(-x^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff \quad 2 = (1+2x^2)(-2x^2+1) = \cancel{-2x^2}+1-4x^4\cancel{+2x^2}$$

$$\iff \quad 1 = -4x^4 \quad \text{impossibile}$$

Nel caso $x=y$ si trova

$$0 = f(x,x) \iff 2 = 2x^2+1+4x^4+2x^2$$

$$\iff 4x^4+4x^2-1=0$$

$$\iff x^2 = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{4} \qquad \text{solo } +$$

$$\iff x^2 = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{4} \overset{+}{=} \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Dunque

$$R_0 = \sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Soluzione alternativa della parte ii). (Soluzione di L. C.)

Dobbiamo calcolare il minimo di $f(x,y) = x^2+y^2$ per $(x,y) \in M$. Per $(x,y) \in M$ abbiamo:

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2} + xy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{con } = \text{ per } x=y}}{\leq} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1+x^2+y^2}{2}$$

Dunque $(1+x^2+y^2)^2 \geq 2 \iff x^2+y^2 \geq \sqrt{2}-1$.
Si deduce che $R_0 \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}$. Con $x=y$ si hanno tutti "=". Un punto $(x,y) \in M$ con $x=y$ esiste:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

Quindi $R_0 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$.

$\square$