Ingegneria Meccanica – Fisica Generale 1 – **CANALE 2**

Prova del 16 Giugno 2023 – Prof. Merano, Giubilato

Matricola: Cognome: Nome:

- <u>Non si consegnano i fogli di brutta</u>
- Fogli senza matricola, cognome e nome non saranno considerati validi
- Si può utilizzare il solo formulario e la calcolatrice non programmabile
- La presenza di qualsiasi altro testo, documento, foglio, strumento,… **invaliderà la prova**
- Le risposte alle DOMANDE sono considerate valide se viene indicata la risposta esatta, **<u>e la scelta è correttamente giustificata nello spazio libero sottostante alla domanda stessa</u>**.
- Le <u>DOMANDE</u> con **risposta corretta** valgono **2 punti**, le domande **senza risposta 0 punti**, le domande **errate** incorrono in una penalizzazione di **-0.5 punti**.
- Gli <u>ESERCIZI</u> vanno svolti con ordine, e **i risultati giustificati analiticamente**. Risultati numericamente o algebricamente corretti, ma mancanti dei passaggi necessari a giustificarli, non verranno considerati validi.

Formulario

Costanti

$g_0 \cong 9.81\ \frac{m}{s^2}$	$G \cong 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$		
$M_\oplus \cong 5.972 \times 10^{24}\ kg$	$R_\oplus \cong 6.4 \times 10^6\ m$	$M_\odot \cong 1.989 \times 10^{30}\ kg$	
$\rho_{H_2O} \cong 1 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$	$\rho_{air} \cong 1.25 \frac{kg}{m^3}$	$\mu_{H_2O} \cong 0.864 \times 10^{-3} Pa\ s$	
$c \cong 3 \times 10^8\ \frac{m}{s}$	$q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\ C$	$\varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$	$\mu_0 \cong 1.256 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$
$m_e \cong 9.01 \cdot 10^{-31}\ kg$	$m_p \cong 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$		

Cinematica, dinamica, lavoro ed energia del punto materiale

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$\mathbf{a}_C = -\omega^2 \mathrm{r}\, \boldsymbol{u}_r = -\frac{v^2}{r}\boldsymbol{u}_r$	
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt}$	$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$
$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \qquad \frac{dW}{dt} = P$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_g = mgh$	$E_e = \frac{1}{2}kx^2$

Gravitazione

$\boldsymbol{F} = G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$U = G\frac{Mm}{r}$		

Momenti

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	

Moti armonici

$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$

$T_{molla} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$T_{pendolo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Dinamica, lavoro ed energia del corpo rigido

$\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i / \sum m_i$

$I = \sum r_i^2 m_i$

$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$

$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$

$I = \acute{I} + mr^2$

$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$

$E_{kr} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$

$E_k = \frac{1}{2}m{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$

$I_{asta} = \frac{1}{12}ml^2$

$I_{anello} = mr^2$

$I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$

$I_{sfera} = \frac{2}{5}ml^2$

Meccanica e dinamica dei fluidi incomprimibili

$F_A = \rho V g$

$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = k$

$Av = cost$

$Re = \frac{\rho}{\mu}Lv_r = \frac{L}{\nu}v_r$

$F_{lmn} = 6\pi r \mu v$

Elettrostatica

$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$

$\boldsymbol{E}_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{u}_r$

$V_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

Campi

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{E} = -\nabla V$

$V = \int -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dr} + k$

$\phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}$

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$C_\Gamma(\boldsymbol{E}) = \iint_\Sigma (\nabla \times \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{d\Sigma}$

$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$

$\boldsymbol{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$

$\boldsymbol{E}_{anello} = \frac{\lambda R y}{2\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}}\boldsymbol{u}_n$

$\boldsymbol{E}_{piano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$

$\boldsymbol{E}_{sup.\ cond.} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$

Capacità, condensatori

$C = \frac{Q}{V}$

$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$

$C_{piano} = \frac{A}{d}\varepsilon_0$

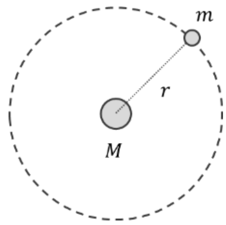
$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$

$C_{par} = \sum_{i=1}^{n} C_i$

$\frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$

1 [2 **pt**] Domanda 1

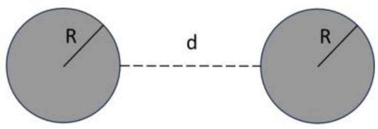
Un satellite di massa incognita m segue un'orbita circolare attorno alla Terra, avente un periodo orbitale di 6 ore. Cosa si può determinare con questi dati?



1) La massa m del satellite, la sua velocità, ed il raggio r dell'orbita.
2) La velocità del satellite, il suo potenziale gravitazionale, ed il raggio r dell'orbita.
3) La massa m del satellite, il suo potenziale gravitazionale, ed il raggio r dell'orbita.
4) L'energia cinetica del satellite, la sua energia potenziale, ed il raggio r dell'orbita.
5) Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

2 [2 **pt**] Domanda 2

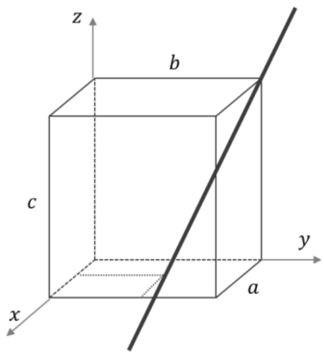
Due eguali masse di piombo (densità del piombo 11.34 g/cm^3) perfettamente sferiche con raggio R 10 cm sono poste in modo che la distanza d tra i loro due punti più prossimi sia di 30 cm. Quanto vale la forza di gravità che una esercita sull'altra?



1) $1.67 \cdot 10^{-4}$ N
2) $6.01 \cdot 10^{-5}$ N
3) $1.67 \cdot 10^{-6}$ N
4) $6.01 \cdot 10^{-7}$ N
5) $1.67 \cdot 10^{-8}$ N

3 [2 **pt**] Domanda 3

Un filo ideale carico con densità di carica λ attraversa un parallelepipedo di lati a, b, c, come in figura. Il filo entra nel parallelepipedo nel punto ($a/2$, $b/2$, 0) ed esce coincidente con lo spigolo (a,b,c). Determinare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie del parallelepipedo.

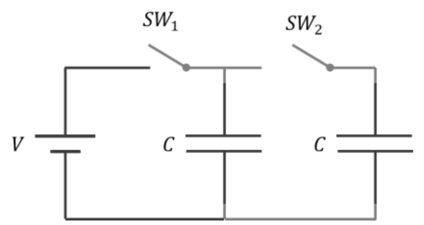


1) $\phi(\boldsymbol{E}) = 0$
2) $\phi(\boldsymbol{E}) = \lambda \frac{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}{2\,\epsilon_0}$
3) $\phi(\boldsymbol{E}) = \lambda \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\epsilon_0}$
4) $\phi(\boldsymbol{E}) = \lambda \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2\,\epsilon_0}$
5) $\phi(\boldsymbol{E}) = \lambda \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\,\epsilon_0}$

4 [2 **pt**] Domanda 4

Due condensatori identici sono connessi ad un generatore di potenziale V come in figura. Chiudo prima l'interruttore SW_1 e carico il primo condensatore. Poi prima apro SW_1 e in seguito chiudo SW_2. Qual è il potenziale finale ai capi dei due condensatori?

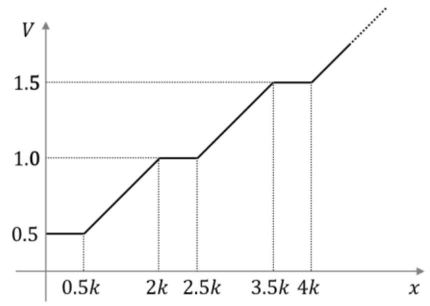
1) $\frac{V}{2}$ 2) V 3) $2V$ 4) $\frac{V}{4}$ 5) $\frac{2}{3}V$



5 [2 **pt**] Domanda 5

Una misura del potenziale elettrico $V(x, y, z)$ mostra come esso dipenda solo dalla posizione x, secondo la relazione illustrata in figura. Quale configurazione di conduttori può rendere ragione di detta misura?

1) Tre sfere conduttrici concentriche, centrate sull'origine, di raggi 0.5k (sfera centrale), 2k e 2.5k (seconda sfera), 3.5k e 4k (terza sfera).
2) Tre piastre parallele conduttrici, di area $4k^2$, ortogonali all'asse x, ognuna spessa 0.5k e spaziate k l'una dall'altra.
3) Tre piastre parallele conduttrici, di area infinita, ortogonali all'asse x, spesse 0.5k e spaziate $1.5k$ la seconda dalla prima e k la terza dalla seconda.
4) Due sfere cave concentriche conduttrici , centrate sull'origine, di raggi 0.5k e 2k (sfera interna), 2.5k e 3.5k (sfera esterna).
5) Due piastre parallele conduttrici, di area infinita, ortogonali all'asse x, spesse 1.5k e spaziate di 0.5 k l'una dall'altra.



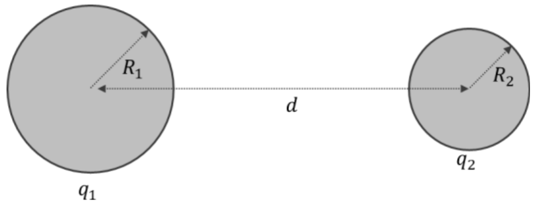
6 [2 **pt**] Domanda 6

Due cariche elettriche positive uguali sono fisse in un piano cartesiano, rispettivamente nei punti di coordinate (1, 0) e (0, 1) dove l'unità di misura delle coordinate è il metro la loro carica elettrica vale q=1nC (n sta per nano cioè 10^{-9}). Qual è il lavoro contro le forze del campo per portare una carica di prova positiva q_0= 1pC (p sta per pico cioè 10^{-12}) dall'origine degli assi al punto S di coordinate (1, 1).

1) - $1.8\cdot10^{-11}$ J
2) $1.8\cdot10^{-11}$ J
3) $6.4\cdot10^{-9}$ J
4) - $6.4\cdot10^{-9}$ J
5) Nullo

1 [**7 pt**] Esercizio 1

Due sfere conduttrici di diametro $R_1 = 27\ mm$ e $R_2 = 18\ mm$ sono poste ad una distanza $d = 270\ mm$; le sfere sono cariche con carica $q_1 = 3\ nC$ e $q_2 = 1\ nC$ rispettivamente. Ad un certo momento, le due sfere vengono connesse da un filo ideale, senza essere spostate.

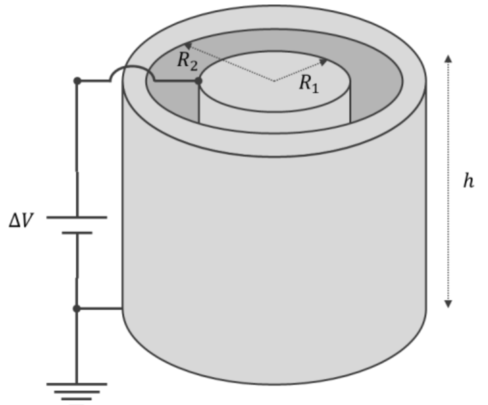


Trascurando gli effetti di mutua induzione (assumiamo $R_1, R_2 \ll d$), determinare:

1) L'energia totale del sistema prima che le sfere vengano connesse.
2) La carica su ognuna delle sfere dopo che sono state connesse.
3) Come varia l'energia tra prima e dopo la connessione? Si può dirlo a priori, senza effettuare calcoli?

2 [**7 pt**] Esercizio 2

Un cilindro conduttore di diametro $R_1 = 11\ mm$ è coassiale ad un altro cilindro cavo avente raggi interno ed esterno $R_2 = 13\ mm$ e $R_3 = 15\ mm$ rispettivamente. Entrambi i cilindri hanno altezza $h = 10\ mm$. I due cilindri sono connessi ad un generatore di potenziale V, il polo positivo connesso al cilindro interno, e quello negativo al cilindro esterno, come in figura. Sul cilindro interno risulta presente una carica positiva $q = 100\ pC$.

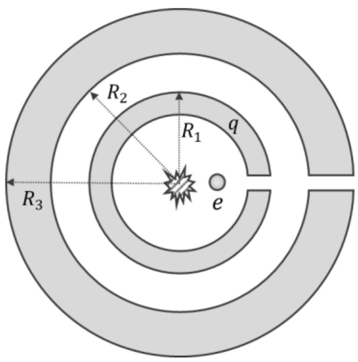


Determinare (si trascurino gli effetti agli estremi):

1) La differenza di potenziale V fornita dal generatore.
2) L'energia totale elettrostatica del sistema.
3) Calcolare come varia la capacità di questo condensatore per piccole variazioni di R_1. Calcolare come varia la capacità per piccole variazioni di R_2.

3 [**7 pt**] Esercizio 3

Una sfera conduttrice cava ha al suo interno un filamento che emette elettroni, di velocità iniziale trascurabile. La sfera ha un forellino su di una parete, di dimensioni trascurabili, da cui possono uscire gli elettroni prodotti al suo interno. Una seconda sfera conduttrice cava, esterna alla prima, ha un forellino identico allineato al primo, come illustrato in figura. La superficie esterna della prima sfera ha raggio $R_1 = 2.5\ cm$, mentre la seconda sfera ha raggi $R_2 = 5\ cm$ e $R_3 = 8.8\ cm$. All'inizio entrambe le sfere sono neutre. In seguito, sulla sfera interna viene depositata una carica $q = -10\ nC$.



Determinare:

1) La differenza di potenziale tra le sfere.
2) La velocità di uscita degli elettroni dal foro sulla seconda sfera.
3) La velocità degli elettroni una volta giunti a $+\infty$.

Svolgimento

Svolgimento

Svolgimento

Soluzioni

1 Domanda 1

La risposta corretta è “**La velocità del satellite, il potenziale gravitazionale, ed il raggio r dell'orbita**”. Tutte le informazioni si ricavano dalla relazione che descrive un'orbita circolare: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$; si evince quindi che m non può essere determinata, mentre esprimendo v come $\frac{2\pi r}{T}$ si può determinare r. Si possono quindi determinare il raggio orbitale r, la velocità del satellite, il potenziale, ma non la massa e, conseguentemente, l'energia cinetica.

2 Domanda 2

La risposta corretta è la 4). Basta usare la legge della gravitazione universale considerando la distanza fra i centri delle masse sferiche. Il risultato è espresso in N per cui si devono esprimere tutte le grandezze in unità del sistema internazionale. (La densità è 11.340 kg/m^3 e la distanza tra i centri delle masse è 0.5 m.)

3 Domanda 3

La risposta corretta è $\lambda \frac{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}{2\,\epsilon_0}$. Per il teorema di Gauss, il flusso attraverso la superficie del parallelepipedo sarà proporzionale alla carica contenuta nel volume dello stesso, pari a λ per la lunghezza l della porzione del filo che attraversa il volume. Con Pitagora si trova $l^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 = \frac{a^2+b^2+4c^2}{4}$, da cui la soluzione.

4 Domanda 4

La risposta corretta è: raddoppia. $2C/5$. Alla prima chiusura di SW_1 si carica la prima capacità, con carica $Q = CV$. SW_1 viene poi aperto, e quindi la carica rimane costante quando viene chiuso SW_2, e si redistribuisce tra i due condesatori. Il ponteziale varrà quindi $\frac{Q}{2C} = \frac{CV}{2C} = \frac{V}{2}$.

5 Domanda 5

La risposta corretta è: tre piastre piane parallele, di area infinita, ortogonali all'asse x, ognuna spessa 0.5k e spaziate $1.5k$ la seconda dalla prima e k la terza dalla seconda.

6 Domanda 6

Per ragioni di simmetria i due punti hanno lo stesso potenziale, per cui il lavoro è nullo.

7 Esercizio 1

L'energia totale del sistema è data dalla carica presente su ognuna delle sfere (capacità intrinseca della sfera), più l'energia potenziale dovuta all'interazione delle sfere stesse (assunte come cariche puntiformi in quanto la mutua induzione è trascurabile). Le sfere hanno capacità:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \cong 3 \cdot 10^{-12}\,F, \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \cong 2 \cdot 10^{-12}\,F$$

L'energia presente sulle sfere risulta quindi:

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{{q_1}^2}{C_1} = \frac{{q_1}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} \cong \frac{(3 \cdot 10^{-9})^2}{6 \cdot 10^{-12}} \cong 1.5 \cdot 10^{-6}\,J,$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{{q_2}^2}{C_2} = \frac{{q_2}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} \cong \frac{(1 \cdot 10^{-9})^2}{4 \cdot 10^{-12}} \cong 2.5 \cdot 10^{-7}\,J$$

L'energia dovuta all'interazione reciproca infine risulta:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \cong \frac{3 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.27} \cong 1 \cdot 10^{-7}\,J$$

L'energia totale del sistema è quindi:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_{12} \cong 1.5 \cdot 10^{-6} + 2.5 \cdot 10^{-7} + 1 \cdot 10^{-7} = 1.85 \cdot 10^{-6}\,J$$

Dopo che le sfere vengono connesse, la carica si ridistribuisce tra le stesse, rimanendo invariata in totale. Inoltre, il potenziale dovrà ora essere V', identico per le due sfere. Le capacità delle sfere non variano, il che permette di scrivere:

$$\begin{cases} V' = \dfrac{{q_1}'}{C_1} = \dfrac{{q_2}'}{C_2} \\ Q = {q_1}' + {q_2}' = q_1 + q_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova:

$${q_1}' = C_1 \frac{Q - {q_1}'}{C_2} \rightarrow {q_1}' = Q\frac{C_1}{C_1 + C_2} = (q_1 + q_2)\frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

Numericamente si trova:

$${q_1}' = (3\,nC + 1\,nC)\frac{27}{27 + 18} \cong 2.4\,nC, \quad {q_2}' = (q_1 + q_2) - {q_1}' = 1.6\,nC$$

Il nuovo potenziale delle sfere è quindi:

$$V' = \frac{{q_1}'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{{q_2}'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \cong 799\,V$$

La nuova energia del sistema sarà:

$$U' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2){V'}^2 + \frac{{q_1}'{q_2}'}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{1}{2}(5\,pF)\,799 + \frac{2.6\,nC\;1.6\,nC}{4\pi\varepsilon_0\;0.27} \cong 1.72 \cdot 10^{-6}\,J$$

Come atteso essa sarà minore, in quanto il sistema si porta al livello energetico più basso.

8 Esercizio 2

Trascurando gli estremi, la carica q sarà tutta sulla superficie del cilindro interno, uniformemente distribuita per simmetria. Per il th. di Gauss (oppure ricordando la formula per il campo di un filo carico) il flusso del campo nello spazio tra i due cilindri ($R_1 \leq r \leq R_2$), è dato da:

$$\phi\big(\boldsymbol{E}(r)\big) = 2\pi r h \boldsymbol{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r h}$$

Notiamo come l'intensità del campo dipenda dall'altezza h: a parità di carica totale q, più la capacità del condensatore formato di due cilindri aumenta (linearmente con h), più debole è il campo al suo interno. Il potenziale sarà dato dall'integrale del campo nella regione di spazio tra i due cilindri:

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r h} dr = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}[\ln r]_{R_1}^{R_2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Come atteso il potenziale diminuisce dal cilindro centrale spostandosi a quello esterno; sostituendo numericamente si trova:

$$\Delta V = -\frac{100 \cdot 10^{-12}}{6.283 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.01}\ln\frac{13}{11} \cong 30.04\, V$$

L'energia del sistema si trova considerando la carica e il potenziale a cui si trova:

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}qV = -\frac{1}{2}q\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Numericamente:

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}qV = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 30.04 \cong 1.502 \cdot 10^{-12} = 1.5\, nJ$$

Dalla prima domanda abbiamo la relazione:

$$\mathrm{V} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

La differenza di potenziale varia dipendentemente da R_1 o R_2; confrontando le derivate:

$$\frac{\mathrm{dV}}{dR_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{R_1}, \quad \frac{\mathrm{dV}}{dR_2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{R_2}$$

Si vede che la derivata rispetto al variare del raggio è positiva per il raggio interno, e negativa per quello esterno; la capacità cresce all'aumentare di R_1, e decrese al diminuire di R_2. La pendenza delle derivate è però proporzionale ai raggi $1/R_1 > 1/R_2$, e quindi conviene aumentare il raggio interno piuttosto che diminuire quello esterno. Intuitivamente, più vicine sono le superfici dei due cilindri più aumenta la capacità, ma a parità di distanza conviene che l'area sia la maggiore possibile, e quindi che R_1 si avvicini a R_2 piuttosto che il contrario.

9 Esercizio 3

Per il th. di Gauss sappiamo che sulla superficie interna della sfera esterna ci sarà una carica pari a $-q$(positiva), ed una pari a $+q$ (negativa) sulla sua superficie esterna (induzione totale). Il campo elettrico tra le due sfere sarà uguale a:

$$E(r)|_{R_1 \le r \le R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

La differenza di potenziale tra le due sfere risulta quindi:

$$\Delta V(r)|_{R_1 \le r \le R_2} = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\right]$$

Gli elettroni che attraversano il forellino verranno accelerati, incrementando la loro energia di $e\Delta V$; notiamo che essendo q negativa, la differenza di potenziale trovata risulta positiva, ma l'elettrone ha carica negativa, e quindi la sua energia potenziale elettrostatica diminuisce man mano che procede tra le due sfere. Per la conservazione dell'energia possiamo scrivere:

$$E = \frac{1}{2}m_e {v_e}^2 + e\Delta V = 0 \quad \rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2e}{m_e}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\right]} = \sqrt{\frac{2e}{m_e}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}}\sqrt{\left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\right]}$$

Risolvendo numericamente:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-31}}\frac{-10 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}}\sqrt{\frac{2.5 - 5}{2.5 \cdot 5}} \cong 1.7897 \cdot 10^7 \cdot 0.447 \cong 8 \cdot 10^6 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Una volta che l'elettrone esce dalla seconda sfera, interagisce col campo elettrico dovuto alla carica q (negativa) presente sulla superficie della sfera. Rispetto all'infinito, il potenziale della sfera esterna vale:

$$V(R_3) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_3}$$

L'elettrone acquisterà quindi ulteriore energia; sfruttando l'equazione precedente si ha:

$$v_e|_\infty = \sqrt{\frac{2e}{m_e}[\Delta V - V(R_3)]} = \sqrt{\frac{2e}{m_e}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_3}\right]} = \sqrt{\frac{2e}{m_e}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}}\sqrt{\left[\frac{(R_1 - R_2)R_3 - R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3}\right]}$$

Sostituendo numericamente e sfruttando il risultato precedente si trova:

$$v_e|_\infty \cong 1.789 \cdot 10^7 \sqrt{\left[\frac{(2.5 - 5) \cdot 8.8 - 2.5 \cdot 5}{2.5 \cdot 5 \cdot 8.8}\right]} \cong 1.789 \cdot 10^7 \cdot 0.56 \cong 1 \cdot 10^7 \left[\frac{m}{s}\right]$$