SEGNALI E SISTEMI
Primo Appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
19 giugno 2023
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Dato il sistema:

$$y(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} x(u)\sin(t-u)du & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dire se è causale, lineare , tempo-invariante, BIBO stabile.

Soluzione Si noti che il sistema si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\mathbf{1}(t-u)\sin(t-u)d\tau\right] \cdot \mathbf{1}(t) \\ &= \Big[x(t) * (\sin(t)\mathbf{1}(t))\Big] \cdot \mathbf{1}(t) \end{aligned}$$

ovvero una convoluzione con $h(t) = \sin(t)\mathbf{1}(t)$ seguita da una moltiplicazione per un gradino, e pertanto:

1. è causale, poichè $h(t)$ è causale;
2. è lineare poichè il sistema è una convoluzione seguita da una moltiplicazione per un gradino;
3. non è tempo-invariante a causa della moltiplicazione per il gradino;
4. non è nemmeno BIBO stabile prchè il sistema covoluzionale ha $h(t) \notin L_1$ e la moltiplicazione per il gradino non modifica la BIBO stabilità.

Esercizio 2 – [punti 7]

Il segnale

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\tfrac{t}{2})$$

viene campionato con passo di campionamento $T_s = \frac{4}{3}$.

1. Trovare quale segnale viene ricostruito dai campioni $x(nT_s)$ impiegando come filtro interpolatore un filtro passa-basso ideale (= 1 in banda passante) con pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{3}{4}\pi$ [5 punti]

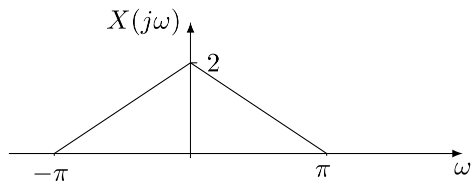
2. Dire quale sarebbe la minima pulsazione di campionamento che consente una ricostruzione esatta di $x(t)$ dai suoi campioni [2 punti]

Soluzione

1. Dalle regole della trasformata di Fourier si ha

$$X(j\omega) = 2\,\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

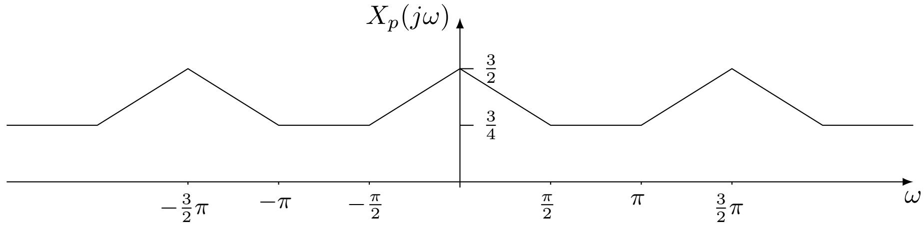
come illustrato in figura

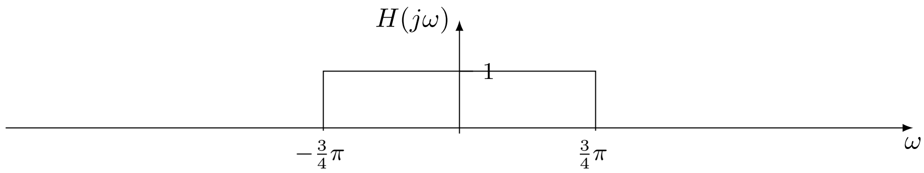


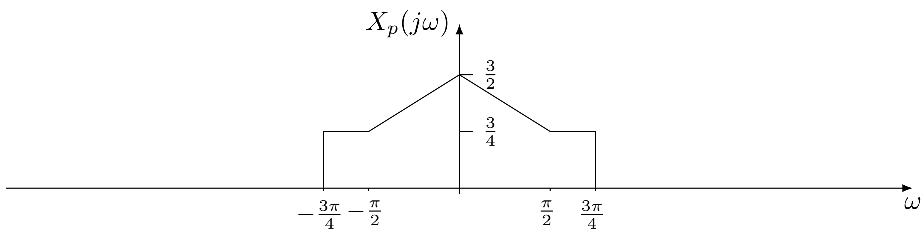
che è una trasformata con estensione $[-\omega_M, \omega_M]$ con $\omega_M = \pi$. Il campionamento e la successiva interpolazione inducono la trasformazione

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\ \underset{\omega_s}{\mathrm{rep}}\ \frac{1}{T_s} X(j\omega) = H(j\omega)\ \underbrace{\underset{\frac{3}{2}\pi}{\mathrm{rep}}\ \tfrac{3}{4} X(j\omega)}_{X_p(j\omega)}$$

con $\omega_s = 2\pi/T_s = \frac{3}{2}\pi < 2\omega_M$, per cui siamo in presenza di aliasing. I segnali $X_p(j\omega)$, $H(j\omega)$ e $Y(j\omega)$ sono mostrati nelle seguenti figure.







Dalla figura si deduce che

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\frac{3}{2}\pi}\right) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\frac{3}{4}\cdot 2\pi}\right) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{4}\cdot 2\pi}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$y(t) = \tfrac{9}{16}\,\mathrm{sinc}\left(\tfrac{3}{4}t\right) + \tfrac{3}{16}\,\mathrm{sinc}^2\left(\tfrac{1}{4}t\right)$$

2. Essendo $\omega_M = \pi$ la minima pulsazione di campionamento è $\omega_{smin} = 2\pi$. In termini di periodo di campionamento, ponendo $\omega_M = 2\pi B$, ovvero $B = \frac{1}{2}$, si ha, $T_s < \frac{1}{2B} = 1$.

Esercizio 3 – [punti 7]

Sia dato un sistema con ingresso e relativa uscita dati da

$$x(t) = e^{-3t}1(t) , \qquad y(t) = \sin(t)1(t)$$

in condizioni iniziali nulle.

1. Identificare la funzione di trasferimento $H(s)$ [3 punti]
2. Scrivere l'equazione differenziale associata [1 punto]
3. Dire se il sistema è BIBO stabile, spiegandone la ragione, e proporre un ingresso limitato che generi un'uscita non limitata [3 punti]

Soluzione

1. Si ha
$$X(s) = \frac{1}{s+3} , \qquad Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$
e pertanto
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+1}$$
con antitrasformata
$$h(t) = \cos(t)1(t) + 3\sin(t)1(t)$$

2. Per ispezione si ha
$$y''(t) + y(t) = x'(t) + 3x(t) .$$

3. Il sistema ovviamente non è BIBO stabile in quanto i suoi poli $\pm j$ stanno sull'asse immaginario. Serve eccitare il sistema con un polo al limite della stabilitá, ad esempio con
$$x(t) = e^{jt}1(t) , \qquad X(s) = \frac{1}{s-j}$$
si ottiene
$$Y(s) = \frac{s+3}{(s-j)^2(s+j)} = \frac{A}{(s-j)^2} + \frac{B}{s-j} + \frac{C}{s+j}$$
con
$$A = \left.\frac{s+3}{s+j}\right|_{s=j} = \frac{1-3j}{2}$$
$$B = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s+j}\right)\right|_{s=j} = \frac{3-j}{4}$$
$$C = \left.\frac{s+3}{(s-j)^2}\right|_{s=-j} = \frac{j-3}{4} = -B$$
ovvero
$$y(t) = Ate^{jt}1(t) + Be^{jt}1(t) - Be^{-jt}1(t)$$
in cui il primo termine è il contributo non limitato.

Esercizio 4 – [punti 3]

Dato il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-20}^{20} j^k \cdot e^{jk\frac{\pi}{20}t}$$

dire se è reale e pari. Calcolarne la potenza.

Soluzione $x(t)$ è scritto come una serie di Fourier con coefficienti

$$a_k = \begin{cases} j^k & |k| \leq 20 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per cui:

1. $x(t)$ è reale e pari se e solo gli a_k sono reali e pari. In questo caso gli a_k non sono reali pari, quindi x(t) non è reale pari. Gli a_k hanno peró simmetria Hermitiana, per cui si può anche concludere che il segnale è reale (ma non pari).

2. $x(t)$ è periodico, per cui la sua potenza è uguale alle potenza media sul periodo che, per il teorema di Parseval, è

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-20}^{+20} |j|^{2k} = \sum_{k=-20}^{+20} 1 = 41$$

Esercizio 5 – [punti 3]

Dati segnali $x(n)$, $y(n)$ e $z(n) = x(n) * y(n)$, dire se le seguenti affermazioni sono vere e giustificare le risposte:

1. $x(n+1) * y(n+1) = z(n+1)$
2. $x(n-7) * y(n+7) = z(n)$
3. $-x(n) * [-y(n)] = -z(n)$

Soluzione

1. Si può pensare a $z(n)$ come l'uscita di un sistema LTI con ingresso $x(n)$ e risposta impulsiva $y(n)$. Se l'ingresso trasla in $n_0 = -1$, anche l'uscita trasla in $n_0 = -1$, per cui si ha $x(n+1)*y(n) = z(n+1)$. Pensando poi al sistema con risposta impulsiva $x(n+1)$ ed ingresso $y(n)$ (uscita $z(n+1)$), se l'ingresso trasla in $n_0 = -1$ ($y(n+1)$), l'uscita trasla concordemente: $z(n+1+1) = z(n+2)$. Quindi l'affermazione è FALSA.

2. Con un ragionamento analogo a quello del punto precedente si deduce che l'affermazione è VERA, infatti $x(n-7) * y(n) = z(n-7)$, da cui $x(n-7) * y(n+7) = z(n-7+7) = z(n)$.

3. Sempre interpretando $z(n)$ come l'uscita di un sistema LTI con ingresso $x(n)$ e risposta impulsiva $y(n)$, per la linearità, se l'ingresso viene moltiplicato per la costante -1, l'uscita viene anche moltiplicata per la stessa costante, per cui $-x(n) * [y(n)] = -z(n)$. Da cui si ha $-x(n) * [-y(n)] = z(n)$, per cui l'affermazione è FALSA.

Esercizio 6 – [punti 3]

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento `T`, siano contenuti nel vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e le pulsazioni associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(omx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```