Corso di Laurea in Chimica Industriale

Chimica Fisica II

Lezione 12

Esercizi
(settima parte)
Errata Corrige sull'esercizio 87

A.A. 2022-2023

Marco Ruzzi

Dipartimento di Scienze Chimiche
Università degli Studi di Padova
Via Marzolo 1 35129 Padova
E-mail: marco.ruzzi@unipd.it

Esercizio 87

Una particella è descritta dalla seguente funzione d'onda normalizzata:

$$\psi(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2}$$

con a parametro reale e x variabile di posizione ($-\infty < x < +\infty$).

(a) Calcolare per la particella i valori di attesa:

$$\langle x \rangle \quad \langle x^2 \rangle \quad \langle p_x \rangle \quad \langle p_x^2 \rangle$$

(b) Si utilizzino i valori di attesa trovati per calcolare le indeterminazioni sulla posizione x e sul momento lineare p_x :

$$\Delta x = \left[\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\right]^{1/2}$$

$$\Delta p_x = \left[\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2\right]^{1/2}$$

Nel calcolo si utilizzino i seguenti integrali notevoli:

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\pi/k\right)^{1/2} \qquad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx^2}\, dx = \frac{1}{4}\left(\pi/k^3\right)^{1/2}$$

Esercizi [208]

Essendo la funzione d'onda già normalizzata, per calcolare il valore di attesa della posizione x, si può scrivere:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \, x \, \psi \quad dx = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \, e^{-2ax^2} \; dx = 0$$

in quanto la funzione integranda è una funzione dispari e il dominio di integrazione è l'intero dominio dei numeri reali.

Per il calcolo del valore di attesa di x^2 vale:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \, x^2 \, \psi \quad dx = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, e^{-2ax^2} \; dx$$

$$= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} 2\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-2ax^2} \; dx$$

$$= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} 2\,\frac{1}{4}\left(\pi/(2a)^3\right)^{1/2} = 1/4a$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale si è utilizzato l'integrale notevole fornito nel testo con $k = 2a$.

Per il calcolo del valore di attesa di p_x vale:

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \; p_x \; \psi \quad dx = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar}{i} e^{-ax^2} \frac{\partial}{\partial x} e^{-ax^2} \; dx$$

$$= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-2ax\right) e^{-2ax^2} \; dx = 0$$

in quanto la funzione integranda è una funzione dispari e il dominio di integrazione è l'intero dominio dei numeri reali.

Per il calcolo del valore di attesa di p_x^2 vale:

$$\left\langle p_x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \; p_x^2 \; \psi \quad dx = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar^2}{i^2} e^{-ax^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-ax^2} \; dx$$

$$= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{i^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-2ax\, e^{-ax^2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{i^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \left(4a^2x^2 e^{-ax^2} - 2a\, e^{-ax^2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{i^2} 2\left(a^2\left(\pi/(2a)^3\right)^{1/2} - a\left(\pi/(2a)\right)^{1/2} \right) = \hbar^2 a$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale si sono utilizzati gli integrali notevoli forniti nel testo.

Valgono dunque: $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = 1/4a$, $\langle p_x \rangle = 0$, $\langle p_x^2 \rangle = \hbar^2 a$.

L'indeterminazione sulla posizione vale:

$$\Delta x = \left[\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\right]^{1/2} = \left(1/4a - 0^2\right)^{1/2} = (1/4a)^{1/2}$$

L'indeterminazione sul momento vale:

$$\Delta p_x = \left[\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2\right]^{1/2} = \left(\hbar^2 a\right)^{1/2} = \hbar (a)^{1/2}$$

Il prodotto delle indeterminazioni vale:

$$\Delta x \, \Delta p_x = (4a)^{-1/2} \hbar (a)^{1/2} = \hbar/2$$

Il risultato è in accordo con il principio di indeterminazione di Heisemberg che prevede che valga sempre: $\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar/2$.