Determinare tutte le proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

t.c. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\varphi(r) = r'$

$\varphi(s) = s'$

$r: \quad x_0 - x_1 = 0$ $\qquad r': \quad x_0 + x_1 = 0$

$s: \quad x_0 + x_1 + x_2 = 0$ $\qquad s': \quad x_1 + x_2 = 0$

sia $A \in PGL_3(\mathbb{R})$ la matrice associata a φ ed il sistema canonico di riferimento

r è descritto da: x t.c. ${}^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} x = 0$

$\Rightarrow \varphi(r)$ descritto da: $\{ Ax \text{ t.c. } {}^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} x = 0 \}$

$\shortparallel$

$\left\{ y \text{ t.c. } \begin{matrix} y = Ax \\ {}^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} x = 0 \end{matrix} \right\}$

$\shortparallel$

$\{ y \text{ t.c. } {}^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} A^{-1} y = 0 \}$

$\shortparallel$

$$\{ y \text{ t.c. } {}^t\left(A^{-T} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right) y = 0 \} \overset{\text{condizione}}{=} r'$$

$\rightarrow$ condizione $\quad \lambda A^{-T} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{equazione di } r'}$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R}^\times) \quad \Rightarrow \quad \lambda \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

analogamente $\quad \varphi(s) = \{ y \text{ t.c. } {}^t\left(A^{-T} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right) y = 0 \}$

$\rightarrow$ condizione $\quad \mu A^{-T} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{equazione di } s'}$ $\quad (\mu \in \mathbb{R}^\times) \quad \Rightarrow \quad \mu \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (i): & A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ (ii): & A^T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\ (iii): & A^T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

Osservazione a priori dovrei chiedere $\gamma, \lambda, \mu \neq 0$

ma sapendo che A è proiettività (ovvero chiedendo $\det(A) \neq 0$)

$\Rightarrow \begin{cases} Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \\ Ker((A^T)) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \end{cases} \Rightarrow$
- $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \neq 0 \rightsquigarrow \gamma \neq 0$
- $A^T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \neq 0 \rightsquigarrow \mu \neq 0$
- $A^T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \neq 0 \rightsquigarrow \lambda \neq 0$

$\Longrightarrow$ Posso non imporre che $\lambda, \mu, \gamma \neq 0$ (dovrò poi ricordare che $\det(A) \neq 0$)

$$(i) \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ d + 2e + f = \gamma \\ g + 2h + i = 0 \end{cases} \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$

questa non è una condizione ($d+2e+f$ è sempre un numero reale)

$$(iii) \begin{cases} d + g = \mu \\ e + h = \mu \\ f + i = \mu \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} a + d = \lambda \\ b + e = \lambda \\ c + f = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \det A \neq 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ g + 2h + i = 0 \\ a + d = b + e \\ c + f = 0 \\ d + g = e + h \\ d + g = f + i \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ queste sono tutte le matrici ammissibili

$$
\begin{cases}
c = -a - 2b \\
\boxed{i = -g - 2h} \\
e = a + d - b \\
\boxed{h = d + g - e = \cancel{d} + g - (a + \cancel{d} - b) = g + b - a} \\
f = -c = a + 2b \\
\boxed{h = d + g - e = \cancel{d} + g + b - a - \cancel{d} = -a + b + g} \\
\boxed{g = f + i - d = a + 2b - d + i}
\end{cases}
$$

dicono la stessa cosa

Semplifichiamo

$$
\begin{cases}
i = -g - 2h \\
h = g + b - a \\
g = a + 2b - d + i = a + 2b - d - g - 2h
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}d - h$$

$$= \frac{1}{2}a + \cancel{b} - \frac{1}{2}d + a - \cancel{b} - g$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}d$$

$$h = -\frac{1}{4}a + b - \frac{1}{4}d$$

$$i = \frac{1}{4}d - \frac{3}{4}a - 2b + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d = -\frac{1}{4}a - 2b + \frac{3}{4}d$$

$$\begin{cases} c = -a-2b \\ i = -\frac{1}{4}a - 2b + \frac{3}{4}d \\ e = a+d-b \\ h = -\frac{1}{4}a + b - \frac{1}{4}d \\ f = a+2b \\ g = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}d \end{cases} \qquad e \qquad \det A \neq 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & -a-2b \\ d & a-b+d & a+2b \\ \frac{1}{4}(a-d) & \frac{1}{4}(-a+4b-d) & \frac{1}{4}(-a-8b+3d) \end{pmatrix}$$

variabili libere: a, b, d

(quasi libere: condizione $\det A \neq 0$)

(Volendo si prende $4A$ per avere coeff. interi, tanto $A \in PGL_3(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ def a meno di multipli)

<u>Osservazione</u> $PGL_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^{3^2-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^8(\mathbb{R})$

- 4 variabili libere $\Rightarrow$ soluzioni sono un piano in $\mathbb{P}^8(\mathbb{R})$, ovvero $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^8(\mathbb{R})$
  con coordinate a,b,d.
- $\det(A) \neq 0$: escludo una curva descritta da un'equazione di grado 3 dal $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ delle soluzioni