Ingegneria Meccanica – Fisica Generale 1 – **CANALE 2**

Prova del 6 Maggio 2023 – Prof. Merano, Giubilato

Matricola: Cognome: Nome:

- <u>Non si consegnano i fogli di brutta</u>
- Fogli senza matricola, cognome e nome non saranno considerati validi
- Si può utilizzare il solo formulario e la calcolatrice non programmabile
- La presenza di qualsiasi altro testo, documento, foglio, strumento,… **invaliderà la prova**
- Le risposte alle DOMANDE sono considerate valide se viene indicata la risposta esatta, **<u>e la scelta è correttamente giustificata nello spazio libero sottostante alla domanda stessa</u>**.
- Le <u>DOMANDE</u> con **risposta corretta** valgono **2 punti**, le domande **senza risposta 0 punti**, le domande **errate** incorrono in una penalizzazione di **-0.5 punti**.
- Gli <u>ESERCIZI</u> vanno svolti con ordine, e **i risultati giustificati analiticamente**. Risultati numericamente o algebricamente corretti, ma mancanti dei passaggi necessari a giustificarli, non verranno considerati validi.

Formulario

Costanti

$g_0 \cong 9.81\ \frac{m}{s^2}$	$G \cong 6.674 \times 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}$		
$M_\oplus \cong 5.972 \times 10^{24}\ kg$	$R_\oplus \cong 6.4 \times 10^6\ m$	$M_\odot \cong 1.989 \times 10^{30}\ kg$	
$\rho_{H_2O} \cong 1 \times 10^3\frac{kg}{m^3}$	$\rho_{air} \cong 1.25\frac{kg}{m^3}$	$\mu_{H_2O} \cong 0.864 \times 10^{-3} Pa\ s$	
$c \cong 3 \times 10^8\ \frac{m}{s}$	$q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\ C$	$\varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12}\frac{F}{m}$	$\mu_0 \cong 1.256 \times 10^{-6}\frac{H}{m}$

Cinematica, dinamica, lavoro ed energia del punto materiale

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$\mathbf{a}_C = -\omega^2 \mathrm{r}\, \boldsymbol{u}_r = -\frac{v^2}{r}\, \boldsymbol{u}_r$	
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt}$	$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$
$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \quad \frac{dW}{dt} = P$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_g = mgh$	$E_e = \frac{1}{2}kx^2$

Gravitazione

$\boldsymbol{F} = G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$U = G\frac{Mm}{r}$		

Momenti

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	

Moti armonici

$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$	$T_{molla} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_{pendolo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	

Dinamica, lavoro ed energia del corpo rigido

$\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i / \sum m_i$	$I = \sum {r_i}^2 m_i$		
$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$		$I = \acute{I} + mr^2$
$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$	$E_{kr} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$	$E_k = \frac{1}{2}m{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$	
$I_{asta} = \frac{1}{12}ml^2$	$I_{anello} = mr^2$	$I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$	$I_{sfera} = \frac{2}{5}ml^2$

Meccanica e dinamica dei fluidi incomprimibili

$F_A = \rho V g$	$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = k$	$Av = cost$	
$Re = \frac{\rho}{\mu}Lv_r = \frac{L}{\nu}v_r$	$F_{lmn} = 6\pi r\mu v$		

Elettrostatica

$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{E}_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$V_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	

Campi

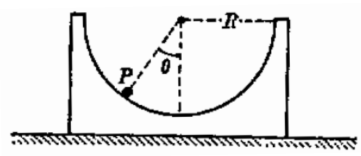
$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E} = -\nabla V$	$V = \int -\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dr} + k$	
$\phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$C_\Gamma(\boldsymbol{E}) = \iint_\Sigma (\nabla \times \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{d\Sigma}$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$
$\boldsymbol{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{E}_{anello} = \frac{\lambda R y}{2\varepsilon_0(R^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{u}_n$	$\boldsymbol{E}_{piano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$	$\boldsymbol{E}_{sup.\ cond.} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$

Capacità, condensatori

$C = \frac{Q}{V}$	$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$		
$C_{piano} = \frac{A}{d}\varepsilon_0$	$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$	$C_{par} = \sum_{i=1}^{n} C_i$	$\frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$

1 [**2 pt**] Domanda 1

Una sferetta P è posta in una conca semisferica di raggio R, in un punto diverso da quello più basso. La sferetta rotola e l'angolo θ indicato in figura varia nel tempo con legge $\theta(t) = \frac{S}{R}\cos(\omega t)$. Quali sono le dimensioni di ω e S?



1) Tempo e spazio
2) Inverso del tempo e spazio
3) Tempo e inverso dello spazio
4) Inverso del tempo e inverso dello spazio
5) Per entrambe lo spazio-tempo

2 [2 **pt**] Domanda 2

Il moto di un punto materiale nel piano x, y è definito dalle equazioni:

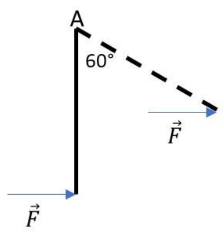
$$x(t) = \alpha t^2 + \beta t$$
$$y(t) = \alpha t^2 - \beta t$$

con α = 0.1 m/s^2 e β = 1 m/s. Quali sono i moduli di accelerazione e velocità all'istante t = 10 s?

1) 0.14 m/s^2, 3 m/s	2) 0.2 m/s^2, 2.94 m/s
3) 0.28 m/s^2, 3.16 m/s	4) 0.33 m/s2, 3.34 m/s
5) 0.08 m/s^2, 10 m/s	

3 [2 **pt**] Domanda 3

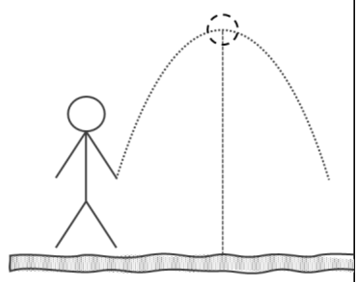
Un'asta di lunghezza L, e massa m vincolata per un suo estremo A è inizialmente in posizione verticale. Ad essa viene applicata una forza costante in modulo direzione e verso come da disegno facendola inclinare fino ad un angolo di 60° con la verticale. Nella configurazione finale l'estremo libero dell'asta si è sollevato di un'altezza pari a $\frac{L}{2}$ e si è spostato orizzontalmente di una distanza pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}L$ mentre il suo centro di massa si è sollevato di un'altezza pari a $\frac{L}{4}$ e si è spostato orizzontalmente di una distanza pari a $\frac{\sqrt{3}}{4}L$. Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza?



1) $L = F\frac{L}{2}$; 2) $L = F\frac{\sqrt{3}}{2}L$; 3) $L = F\frac{L}{4}$; 4) $L = F\frac{\sqrt{3}}{4}L$; 5) $L = mg\frac{L}{4}$

4 [2 **pt**] Domanda 4

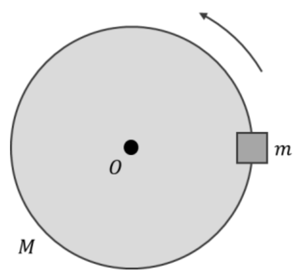
Giocando in giardino un bambino lancia in aria un sasso di massa m, imprimendogli un moto parabolico. Nell'istante in cui il sasso si trova all'apice della traiettoria, quale delle seguenti affermazioni è corretta?



1) Il sasso ha velocità nulla.
2) Non agiscono forze sul sasso (o la loro somma è nulla).
3) L'energia potenziale del sasso è minima.
4) Il sasso ha accelerazione pari a g.
5) Il sasso ha accelerazione nulla.

5 [2 **pt**] Domanda 5

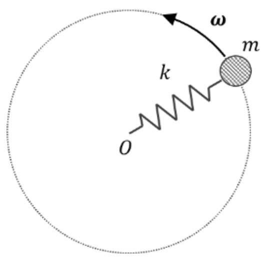
Un disco omogeneo di massa M ruota con velocità angolare costante ω; solidale al bordo del disco c'è un blocchetto (di dimensioni trascurabili) di massa m. Ad un certo punto il blocchetto m si stacca: determinare come evolve il sistema.



1) Si conserva l'energia, ma non il momento angolare, ω diminuisce.
2) Si conservano energia e momento angolare, ω aumenta.
3) Non si conservano energia e momento angolare, ω diminuisce.
4) Si conservano energia e momento angolare, ω non varia.
5) Si conserva l'energia ma non il momento, ω non varia.

6 [2 **pt**] Domanda 6

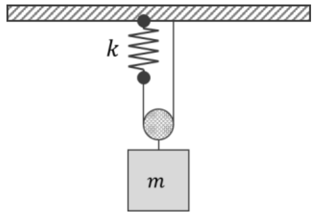
Una sfera di massa m percorre una traiettoria circolare con velocità angolare costante ω, trattenuta da una molla di costante elastica k. Ad un certo punto viene dato un colpetto alla massa in direzione dell'origine, senza alterare ω, di modo che il sistema massa-molla si metta ad oscillare. Determinare la frequenza di oscillazione.



1) $\frac{\sqrt{m/k}}{2\pi}$, 2) $\frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$, 3) $\frac{\sqrt{k/m}}{\omega}$, 4) $\omega\sqrt{k/m}$, 5) $\frac{\sqrt{m/k}}{\omega}$

7 [**7 pt**] Esercizio 1

Un blocco di massa $m = 10\ kg$ è sospeso al soffitto tramite una puleggia ideale di massa nulla. La puleggia è a sua volta sostenuta da una fune ideale, inestensibile e prima di massa, che si aggancia al soffitto solidalmente su di un ramo, e attraverso una molla di costante elastica $k = 100\ N/m$ dall'altro.



Determinare:
1) [*2 pt*]: l'elongazione della molla all'equilibrio del sistema
2) [*2 pt*]: l'ampiezza dell'oscillazione se la massa viene lasciata libera quando la molla è a riposo (Si noti che per un allungamento x della molla la massa scende di x/2).
3) [*3 pt*]: il periodo di oscillazione della massa

8 [**7 pt**] Esercizio 2

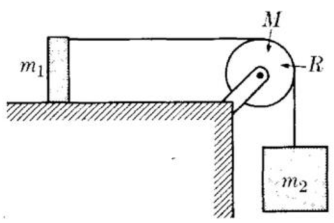
Un'asta lunga L = 3 m, di massa m pari a 50 kg inizialmente ferma in posizione verticale con un estremo incernierato a terra, cade al suolo.

Determinare:
[**3 pt**] il momento angolare della sbarra rispetto all'estremo incernierato nel momento in cui sbatte a terra
[**1 pt**] la velocità dell'altro estremo nel momento in cui sbatte a terra
[**3 pt**] la componente della reazione vincolare lungo l'asta quando quest'ultima, cadendo, fa un angolo di 45° con il terreno

9 [**7 pt**] Esercizio 3

Nel sistema in figura la fune è ideale e scorre senza scivolare attorno alla puleggia di massa M e raggio R. In questo caso m_1 = 50 kg, m_2 = 200 kg, M =15 kg e R = 10 cm.

Determinare:
[**2 pt**] l'accelerazione della massa m_2
[**2 pt**] la forza che la fune esercita su m_1
[**2 pt**] se il sistema parte da fermo, l'energia cinetica della puleggia quando la massa m_1 è traslata verso destra di 50 cm
[**1 pt**] Il momento delle forze esterne che agisce sulla puleggia



Soluzioni

1 Domanda 1

6) Il coseno è una funzione trascendente il cui argomento deve essere adimensionale per cui ω è l'inverso di un tempo. L'angolo è una quantità adimensionale per cui S ha le dimensioni dello spazio. La risposta corretta è ***"Inverso del tempo e spazio"***

2 Domanda 2

Si ha: $\begin{matrix} v_x(t) = 2\alpha t + \beta \\ v_y(t) = 2\alpha t - \beta \end{matrix} \rightarrow v = \sqrt{8\alpha^2 t^2 + 2\beta^2} = 3.16\ m/s$

$$\begin{matrix} a_x(t) = 2\alpha \\ a_y(t) = 2\alpha \end{matrix} \rightarrow a = \sqrt{8\alpha^2} = 0.28\ m/s^2$$

La risposta corretta è ***"0.28 m/s^2, 3.16 m/s"***

3 Domanda 3

Il lavoro è forza prodotto scalare spostamento, la risposta corretta è ***"$\boldsymbol{L = F\frac{\sqrt{3}}{2}L}$"***.

4 Domanda 4

La risposta corretta è "**Il sasso ha accelerazione pari a $\boldsymbol{g}$**". All'apice della traiettoria la velocità è infatti non nulla (e pari alla sola velocità orizzontale), e in assenza di attriti sul sasso agisce la sola forza di gravità. Questo significa che il sasso è sottoposto ad un'accelerazione pari a g, che rimane peraltro costante durante tutta la traiettoria dello stesso.

5 Domanda 5

La risposta corretta è "**Si conservano energia e momento angolare, $\boldsymbol{\omega}$ non varia**". Non vi sono forze ne momenti esterni al sistema, ne attriti, quindi energia e momento si conservano. La conservazione del momento (e dell'energia) è valida per il disco ed il blocchetto separatamente, quindi il momento angolare del disco non varia, e di conseguenza ω.

6 Domanda 6

La risposta corretta è $\boldsymbol{\frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}}$. In un moto circolare uniforme la molla risulta elongata di quanto basta a generare la forza centripeta necessaria, similmente al caso di una molla soggetta alla forza di gravità. In queste condizioni la pulsazione dell'oscillazione non cambia, ed è uguale a $\sqrt{k/m}$. La frequenza è semplicemente la pulsazione su 2π. Lo si poteva anche vedere con argomenti dimensionali.

7 Esercizio 1

Il sistema è chiaramente una versione modificata del classico massa-molla, per il quale sappiamo che la pulsazione è data dalla relazione $\omega = \sqrt{k/m}$, e la gravità non ha influenza sul periodo, ma solo sulla condizione di equilibrio del sistema. La relazione originale è stata trovata partendo dall'equazione generale della dinamica (per massa costante)

$$F = \mathrm{kx} = m\ddot{x}$$

Nel caso in esame, per uno spostamento x della massa, si ha un'elongazione della molla pari a $2x$, a causa della presenza della puleggia; inoltre, la puleggia fa si che la massa subisca una forza di trazione della molla doppia rispetto a quella applicata dalla stessa (la supplisce l'altro ramo della fune). l'equazione va quindi riscritta come:

$$F = 2 \cdot \mathrm{k(2x)} = m\ddot{x}$$

Si ha quindi l'equazione differenziale:

$$4kx = m\ddot{x}$$

Ponendo $k' = 4k$ si ritrova la ben nota dell'oscillatore armonico

$$k'x = m\ddot{x}$$

Possiamo allora scrivere:

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{m}}$$

Il periodo risulterà essere:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\,k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{4 \cdot 100}} \cong 0.99\ s$$

ovvero circa un secondo. La posizione di equilibrio si ha eguagliando la forza peso mg alla forza esercitata dai due rami della fune, dove ogni ramo esercita una forza pari a kl, con l elongazione della molla:

$$mg = 2kl \rightarrow l = \frac{mg}{2\,k} \cong \frac{10 \cdot 9.81}{2 \cdot 100} \cong 0.5\ m$$

Quindi l'equilibrio si ha per un'elongazione della molla di circa 50 cm. Notiamo che, assumendo una dimensione nulla della molla a riposo, un'elongazione della molla di 50 cm corrisponde ad uno spostamento della massa di 25 cm, che possiamo identificare come la posizione di equilibrio.

Lasciando il sistema libero a partire dalla posizione di riposo della molla, possiamo usare la conservazione dell'energia per determinare la massima ampiezza dell'oscillazione a, dove la differenza di energia potenziale gravitazionale mga dovrà eguagliare l'energia elastica dovuta all'estensione della molla $\frac{1}{2}kl^2$; considerando che l'elongazione della molla è doppia rispetto allo spostamento della massa ($l = 2a$), si ha:

$$mga = \frac{1}{2}k(2a)^2 \rightarrow mg = 2ka \rightarrow a = \frac{mg}{2k} \cong \frac{10 \cdot 9.81}{2 \cdot 100} \cong 0.5\ m$$

che correttamente corrisponde al doppio della posizione di equilibrio prima trovata, in quanto in questa configurazione l'equilibrio corrisponde a metà dell'ampiezza.

8 Esercizio 2

Quando cade a terra l'energia potenziale dell'asta si è trasformata in energia cinetica. La perdita di energia potenziale può essere vista come perdita di energia potenziale del centro di massa. L'energia cinetica acquisita è energia cinetica di rotazione attorno all'estremo incernierato a terra.

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Nota la velocità angolare attorno all'estremo incernierato, il momento angolare dell'asta rispetto allo stesso estremo è

$$I\omega = m\sqrt{\frac{g\,L^3}{3}} = 4.7 \cdot 10^2 kg\,m^2/s$$

La velocità dell'altro estremo dell'asta è data da

$$v = \omega L = \sqrt{3gL} = 9.4\,m/s$$

Quando l'asta fa un angolo di 45° con il terreno il centro di massa è sceso di una quota pari a $h = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

L'energia cinetica acquisita dall'asta è pari a $mgh = \frac{1}{2}I\omega_{45}^2 \rightarrow \omega_{45}^2 = 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{g}{L}$. Il centro di massa ha un'accelerazione centripeta pari a $\frac{L}{2}\omega_{45}^2$. Per la prima equazione cardinale della meccanica si ha $m\frac{L}{2}\omega_{45}^2 = mg\frac{1}{\sqrt{2}} + R \rightarrow R = mg\left(\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -131N$. Dove il segno meno sta ad indicare che tale componente è diretta come l'asta e verso l'alto.

9 Esercizio 3

Scelgo un sistema di assi x verso destra, y verso il basso e z verso l'interno del foglio. Il sistema è soggetto alle seguenti equazioni

$$\begin{gathered} m_2 a = m_2 g - T_2 \\ m_1 a = T_1 \\ M_{ext} = R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}MR^2\alpha \\ \alpha R = a \end{gathered} \rightarrow \begin{gathered} a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \\ T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \\ M_{ext} = \frac{1}{2}MR\frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \end{gathered} \rightarrow \begin{gathered} a = 7.62\,m/s^2 \\ T_1 = 381\,N \\ M_{ext} = 5.71\,N \cdot m \end{gathered}$$

Dove $a > 0$ significa che m_2 scende verso il basso, $T_1 > 0$ significa che la forza della fune sulla massa m_1 spinge verso destra e $M_{ext} > 0$ significa che il momento delle forze esterne agenti sulla puleggia è diretto verso l'interno del foglio.

Quando la massa m_1 è traslata verso destra di h = 50 cm = 0.5 m, la massa m_2 è scesa verso il basso della stessa distanza. Si ha una perdita di energia potenziale che si trasforma in energia cinetica del sistema

$$\begin{gathered} m_2 gh = \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 \\ \omega R = v \end{gathered} \rightarrow v^2 = \frac{2\,m_2 gh}{m_2 + m_1 + \frac{M}{2}}$$

L'energia cinetica della puleggia è $\frac{1}{4}MR^2\omega^2 = \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{M\,m_2 gh}{m_2 + m_1 + M} = 27.7\,J$