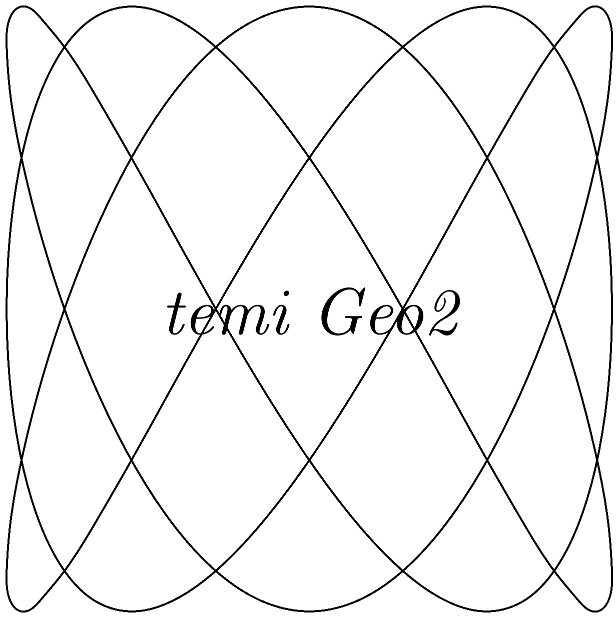
Raccolta esami a.a. 2009/10/11/12/13/14/15/16/17/18/19

Geometria 2 A (Forme Quadratiche e Geometria Proiettiva)
Geometria 2 B (Curve e Superficie differenziali e Topologia)



Sono raccolti gli esami dei corsi di Geometria 2 parte A (trimestrale/semestrale) del Corso di Laurea Triennale in Matematica dell'Università di Padova negli anni accademici dell'ordinmento secondo il D.M. 270/2004. I contenuti dei corsi riguardavano le forme quadratiche, le quadriche e la geometria proiettiva. Da un certo punto sono presenti anche gli esami della parte B (Geometria differenziale di curve e superficie, Topologia generale). Si è volutamente evitato di scrivere le soluzioni degli esercizi, nella maggior parte dei casi per evidente ripetitività, e nel caso degli esercizi di topologia per invitare lo studente ad affrontare e risolvere i problemi da sè o discutendone con altri piuttosto che leggere delle soluzioni (spesso non uniche, tra l'altro).

Docenti di quei corsi sono stati: Francesco Baldassarri, Maurizio Cailotto, Maurizio Candilera.

Università di Padova **Dip.Matem.**

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare la segnatura di g esibendo una base ortogonale.

(b) Determinare la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono due sottospazi isotropi massimali complementari tra loro? se sì, scriverne delle basi e la matrice di g corrispondente.

(c) Determinare se V contiene piani iperbolici; esistono due piani iperbolici tra loro ortogonali?

(d) È vero o falso (e perché) che ogni sottospazio isotropo di dimensione 1 è contenuto in qualche piano iperbolico di (V, g)?

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(K)$ si considerino quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4. Mostrare che essi non sono complanari se e solo se per ogni permutazione σ di $\{1, 2, 3, 4\}$ le due rette $P_{\sigma 1} \vee P_{\sigma 2}$ e $P_{\sigma 3} \vee P_{\sigma 4}$ sono sghembe.

Dualizzare l'enunciato.

Come si generalizzano l'enunciato e il suo duale in $\mathbb{P}^n(K)$?

Esercizio 3. Sia V spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{C}$, e indichiamo con $V_\mathbb{R}$ lo spazio V stesso in quanto spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(a) Se $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ è base di V su $\mathbb{C}$, mostrare che $(\mathcal{V}, i\mathcal{V}) = (v_1, v_2, iv_1, iv_2)$ è base di $V_\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$.

(b) Se $\phi : V \to V$ è applicazione $\mathbb{C}$-lineare di matrice $C = A + iB$ nella base $\mathcal{V}$ (con $C \in M_2(\mathbb{C})$ e $A, B \in M_2(\mathbb{R})$), determinare la matrice della stessa funzione $\phi_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$ nella base $(\mathcal{V}, i\mathcal{V})$.

(c) Se $h : V \times V \to \mathbb{C}$ è forma hermitiana, mostrare che esiste una unica forma bilineare simmetrica $g : V_\mathbb{R} \times V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che le forme quadratiche associate $Q_h(v) = h(v, v)$ e $Q_g(v) = g(v, v)$ coincidano. Se $H = L + iM$ è matrice di h nella base $\mathcal{V}$ (c.s.), chi è la matrice di g nella base $(\mathcal{V}, i\mathcal{V})$?

(d) Nel caso che ϕ sia autoaggiunto rispetto ad una forma hermitiana h definita positiva, determinare la relazione tra il polinomio caratteristico di ϕ e quello di $\phi_\mathbb{R}$. Cosa si può dire se ϕ è normale?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, distinguendo i casi $\alpha \neq \beta$ e $\alpha = \beta$.

(b) Dire sotto quali condizioni e su quali sottospazi sono indotte omologie e/o involuzioni.

(c) Nel caso $\alpha \neq \beta$, per ogni retta unita r e per ogni suo punto unito P si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$ dove $Q \in r$ non unito per ϕ.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche tangente in $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ alla retta $X_1 + X_2 = 2X_0$ e passanti per i punti $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)? Esistono riferimenti proiettivi che diagonalizzano contemporaneamente tutte le coniche non degeneri del fascio?

(b) Classificare affinemente le coniche del fascio nel piano $X_0 \neq 0$, e descrivere il luogo formato dai centri delle coniche a centro del fascio. Esiste un riferimento affine che diagonalizza contemporaneamente tutte le coniche non degeri del fascio?

(c) In generale, che luogo viene descritto dai centri delle coniche a centro di un fascio tangente (ciclo base $2A + B + C$, tangente in A la retta r, con A, B, C punti del piano affine)?

Esercizio 3. Sia data la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $2X_0^2 + X_1^2 - 2X_0X_3 - 2X_1X_2$.

(a) Classificare proiettivamente $\mathcal{Q}$; scegliendo opportunamente un piano quale piano improprio, quali classificazioni affini si possono ottenere per $\mathcal{Q}$?

(b) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Determinare eventuali cerchi contenuti in $\mathcal{Q}$ per l'usuale struttura di spazio euclideo.

(c) Pensata come quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, è vero che $\mathcal{Q}$ contiene rette? Eventualmente determinarle tutte.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(*a*) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(*b*) Per ogni punto unito, si descriva la proiettività indotta sulla stella di piani di centro quel punto, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento della stella.

(*c*) Per ogni retta unita r e per ogni suo punto unito P, sia $Q \in r$ non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^{-1}Q)$.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche bitangente in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alla retta $X_0 - X_2 = 0$ e in $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ alla retta $X_1 + X_0 = 0$.

(*a*) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(*b*) Classificare affinemente le coniche del fascio nel piano $X_0 \neq 0$, e descrivere il luogo formato dai centri delle coniche a centro del fascio. Trovare le circonferenze per l'usuale struttura euclidea.

(*c*) In generale, che luogo viene descritto dai centri delle coniche a centro di un fascio bitangente (ciclo base $2A + 2B$, tangente in A la retta r, in B a s, con A, B punti del piano affine)?

Esercizio 3. Consideriamo la funzione $\phi : r \to s$, dove $r : X_2 = 0 = X_3$ e $s : X_0 = 0 = X_1$ sono rette di $\mathbb{P}^3(K)$ data da $\phi \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_0 - x_1 \\ x_0 + x_1 \end{pmatrix}$.

Fatto lunedì 29 maggio al tutorato di geo1B

(*a*) Mostrare che ϕ è proiettività, e determinare l'equazione del luogo $\mathcal{Q}$ formato dall'unione di tutte le rette $P \vee \phi(P)$ al variare di $P \in r$.

(*b*) Per ogni piano di $\mathbb{P}^3(K)$, determinare la classificazione affine di $\mathcal{Q}$ nello spazio affine complementare.

(*c*) Detti $P_0, P_1 \in r$ i punti fondamentali del riferimento scelto, siano $r_0 = P_0 \vee \phi(P_0)$, $r_1 = P_1 \vee \phi(P_1)$. Determinare la proiettività $r_0 \to r_1$ definita (in che modo?) da $\mathcal{Q}$.

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = 2X_0^2 - X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_0X_3 - 2X_1X_2$. di $\mathbb{R}^4$

(*a*) Classificare la forma bilineare associata, determinando in particolare una base ortogonale, e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(*b*) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; scegliendo opportunamente un piano quale piano improprio, quali classificazioni affini si possono ottenere per $\mathcal{Q}$? Pensata come quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, è vero che $\mathcal{Q}$ contiene rette (eventualmente determinarle tutte)?

(*c*) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Usando l'usuale struttura di spazio euclideo, specificare una equazione canonica per $\mathcal{Q}$ e determinare eventuali cerchi contenuti in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni punto unito, si descriva la proiettività indotta sulla stella di piani di centro quel punto, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento della stella.

(c) Per ogni retta unita r e per ogni suo punto unito P, sia $Q \in r$ non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$. Si tratta, opportunamente riordinata, di una quaterna armonica?

Esercizio 2. Si consideri il fascio generale di coniche passanti per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere l'equazione generale del fascio e le coniche degeneri del fascio. Esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Classificare affinemente le coniche del fascio nel piano $X_0 \neq 0$, e descrivere il luogo formato dai centri delle coniche a centro del fascio. Trovare le circonferenze per l'usuale struttura euclidea.

(c) In generale, che luogo viene descritto dai centri delle coniche a centro di un fascio generale (ciclo base $A + B + C + D$, con A, B, C, D punti del piano affine)?

Esercizio 3. Consideriamo la funzione $\phi : r \to s$, dove $r : X_2 = 0 = X_3$ e $s : X_0 = 0 = X_1$ sono rette di $\mathbb{P}^3(K)$ data da $\phi \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_0+x_1 \\ x_0-x_1 \end{pmatrix}$.

(a) Mostrare che ϕ è proiettività, e determinare l'equazione del luogo $\mathcal{Q}$ formato dall'unione di tutte le rette $P \vee \phi(P)$ al variare di $P \in r$.

(b) Per ogni piano di $\mathbb{P}^3(K)$, determinare la classificazione affine di $\mathcal{Q}$ nello spazio affine complementare.

(c) Detti $P_0, P_1 \in r$ i punti fondamentali del riferimento scelto, siano $r_0 = P_0 \vee \phi(P_0)$, $r_1 = P_1 \vee \phi(P_1)$. Determinare la proiettività $r_0 \to r_1$ definita (in che modo?) da $\mathcal{Q}$.

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = 2X_0^2 - 2X_1^2 - 2X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_1 + 2X_1X_2 + 2X_2X_3$. di $\mathbb{R}^4$

(a) Classificare la forma bilineare associata, determinando in particolare una base ortogonale, e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; scegliendo opportunamente un piano quale piano improprio, quali classificazioni affini si possono ottenere per $\mathcal{Q}$? Pensata come quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, è vero che $\mathcal{Q}$ contiene rette (eventualmente determinarle tutte)?

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Usando l'usuale struttura di spazio euclideo, specificare una equazione canonica per $\mathcal{Q}$ e determinare eventuali cerchi contenuti in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni punto unito, si descriva la proiettività indotta sulla stella di piani di centro quel punto, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento della stella.

(c) Per ogni retta unita r e per ogni suo punto unito P, sia $Q \in r$ non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche passanti per il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e osculatrici nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alla conica di equazione $2X_0X_2 = X_1^2$.

(a) Scrivere l'equazione generale del fascio e le coniche degeneri del fascio. Esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Classificare affinemente le coniche del fascio nel piano $X_0 \neq 0$, e descrivere il luogo formato dai centri delle coniche a centro del fascio. Nello stesso piano, pensato con la struttura euclidea usuale, determinare gli assi per ogni conica non degenere del fascio.

(c) In generale, che luogo viene descritto dai centri delle coniche a centro di un fascio osculatore (ciclo base $3A + B$, con A, B punti del piano affine)?

Fatto lunedì 29 maggio a tutorato di geo1B

Esercizio 3. Siano dati un piano π e una retta r tra loro sghembi in $\mathbb{P}^4(K)$.

(a) Mostrare che per ogni punto P non appartenente né ad r né a π, esiste una unica retta p per P incidente sia r sia π.

(b) Se il punto P varia su una retta, come si può descrivere l'unione di tutte le rette p che si ottengono nel punto precedente?

(c) Dualizzare l'enunciato del punto (a).

Esercizio 4. È data la forma quadratica $Q(X) = X_1^2 + 2X_0X_2 - 2X_1X_2 - X_3^2$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Classificare la forma bilineare associata, determinando in particolare una base ortogonale, e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; scegliendo opportunamente un piano quale piano improprio, quali classificazioni affini si possono ottenere per $\mathcal{Q}$? Pensata come quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, è vero che $\mathcal{Q}$ contiene rette (eventualmente determinarle tutte)?

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Usando l'usuale struttura di spazio euclideo, specificare una equazione canonica per $\mathcal{Q}$ e determinare eventuali cerchi contenuti in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni punto unito, si descriva la proiettività indotta sulla stella di piani di centro quel punto, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento della stella.

(c) Per ogni retta unita r e per ogni suo punto unito P, sia $Q \in r$ non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche iperosculatrici nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alla conica di equazione $2X_0X_2 = X_1^2$.

(a) Scrivere l'equazione generale del fascio e le coniche degeneri del fascio. Esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Classificare affinemente le coniche del fascio nel piano $X_0 \neq 0$, e descrivere il luogo formato dai centri delle coniche a centro del fascio. Nello stesso piano, pensato con la struttura euclidea usuale, determinare gli assi per ogni conica non degenere del fascio.

(c) In generale, che luogo viene descritto dai centri delle coniche a centro di un fascio iperosculatore (ciclo base $4A$, con A punto del piano affine)?

Esercizio 3. Siano dati un piano π e una retta r tra loro sghembi in $\mathbb{P}^4(K)$.

(a) Mostrare che, per ogni retta s contenuta π, $r \vee s$ è uno spazio di dimensione 3 la cui intersezione con π è esattamente s.

(b) È vero o falso che ogni iperpiano della stella di r si ottiene come $r \vee s$ per qualche retta (unica?) s contenuta in π?

(c) Dualizzare l'enunciato del punto (a).

Esercizio 4. È data la forma quadratica $Q(X) = X_0^2 - X_0X_1 - X_0X_2 + 2X_1^2 + X_3^2 - 2X_1X_3$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Classificare la forma bilineare associata, determinando in particolare una base ortogonale, e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; scegliendo opportunamente un piano quale piano improprio, quali classificazioni affini si possono ottenere per $\mathcal{Q}$? Pensata come quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, è vero che $\mathcal{Q}$ contiene rette (eventualmente determinarle tutte)?

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Usando l'usuale struttura di spazio euclideo, specificare una equazione canonica per $\mathcal{Q}$ e determinare eventuali cerchi contenuti in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni punto unito, si descriva la proiettività indotta sulla stella di piani di centro quel punto, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento della stella.

(c) Per ogni retta unita r e per ogni suo punto unito P, sia $Q \in r$ non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche bitangenti nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alla conica di equazione $X_0X_2 = X_1^2$.

(a) Scrivere l'equazione generale del fascio e le coniche degeneri del fascio. Esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Classificare affinemente le coniche del fascio nel piano $X_0 \neq 0$, e descrivere il luogo formato dai centri delle coniche a centro del fascio. Nello stesso piano, pensato con la struttura euclidea usuale, determinare gli assi per ogni conica non degenere del fascio.

(c) In generale, che luogo viene descritto dai centri delle coniche a centro di un fascio bitangente (ciclo base $2A + 2B$, con A, B punto del piano affine)?

Esercizio 3. Siano dati un piano π e una retta r tra loro sghembi in $\mathbb{P}^4(K)$.

(a) Mostrare che, per ogni punto R di r, $R \vee \pi$ è uno spazio di dimensione 3 la cui intersezione con r è esattamente R.

(b) È vero o falso che ogni iperpiano della stella di π si ottiene come $R \vee \pi$ per qualche punto (unico?) R contenuto in r?

(c) Dualizzare l'enunciato del punto (a).

Esercizio 4. È data la forma quadratica $Q(X) = 2X_0^2 - 6X_0X_3 + X_1^2 - 2X_1X_2 + 3X_2^2 + 3X_3^2$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Classificare la forma bilineare associata, determinando in particolare una base ortogonale, e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; scegliendo opportunamente un piano quale piano improprio, quali classificazioni affini si possono ottenere per $\mathcal{Q}$? Pensata come quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, è vero che $\mathcal{Q}$ contiene rette (eventualmente determinarle tutte)?

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Usando l'usuale struttura di spazio euclideo, specificare una equazione canonica per $\mathcal{Q}$ e determinare eventuali cerchi contenuti in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni piano unito, si descriva la proiettività indotta su quel piano, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento.

(c) Per una retta unita r e per ogni coppia P, Q di punti di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche passanti per i punti fondamentali e il punto unità del riferimento canonico di $\mathbb{P}^2(K)$.

(a) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Calcolare le polari del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alle coniche del fascio. Si tratta di un fascio di rette?

(c) Vi sono punti del piano tali che la loro retta polare è la stessa per tutte le coniche del fascio? Giustificare la risposta anche senza calcoli.

Esercizio 3.

(a) Sia ϕ proiettività tra due rette r, s distinte del piano proiettivo, con $\phi(r \wedge s) = r \wedge s$; mostrare che si tratta di una proiezione da r a s di centro un opportuno punto.

(b) Dualizzare l'enunciato precedente.

(c) Sia ϕ proiettività tra due piani π, σ distinti dello spazio proiettivo con $\phi(P) = P$ per ogni $P \in \pi \wedge \sigma$. è vero che si tratta di una proiezione da π a σ di centro un opportuno punto (dimostrazione o controesempio)?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = 2X_0^2 + X_1^2 - 2X_2^2 - X_3^2 - 2X_0X_3 + 2X_1X_2 - 2X_2X_3$ di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; trovare i piani tangenti alla quadrica nei suoi punti di intersezione con la retta $X_0 = 0 = X_2$.

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$, e determinarne il centro. Scegliendo altri piani, che classificazioni si possono ottenere negli spazi affini complementari?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni piano unito, si descriva la proiettività indotta su quel piano, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento.

(c) Per una retta unita r e per ogni coppia P, Q di punti di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche passanti per i punti fondamentali del riferimento canonico di $\mathbb{P}^2(K)$, e tangenti nel primo di essi alla retta per il punto unità.

(a) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Calcolare le polari del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alle coniche del fascio. Si tratta di un fascio di rette?

(c) Quali sono i punti del piano tali che la loro retta polare è la stessa per tutte le coniche del fascio? Giustificare l'esistenza dei punti trovati anche senza calcoli.

Esercizio 3. Sia K un campo algebricamente chiuso.

(a) Dati quattro punti P_1, P_2, Q_1, Q_2 di una retta proiettiva su K, esiste una coppia di separatori armonici comuni, cioè U, V tali che $(P_1\ P_2\ U\ V) = -1$ e $(Q_1\ Q_2\ U\ V) = -1$.

(b) Si consideri l'enunciato (a) per quattro punti allineati nel piano. Dualizzarlo.

(c) È vero o falso che due involuzioni di una retta proiettiva, aventi punti fissi disgiunti, hanno sempre una coppia involutoria comune? E se usiamo $K = \mathbb{R}$?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = X_0^2 + X_0X_3 + 2X_1X_2 + 2X_2X_3$ di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani (vettoriali) in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; trovare i piani tangenti alla quadrica nei suoi punti di intersezione con la retta $X_0 = 0 = X_3$.

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Scegliendo altri piani, che classificazioni si possono ottenere negli spazi affini complementari?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.
(b) Per ogni piano unito, si descriva la proiettività indotta su quel piano, per esempio scrivendone la matrice in un opportuno riferimento.
(c) Per una retta unita r e per ogni coppia P, Q di punti di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche passanti per i due punti fondamentali $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ del riferimento canonico di $\mathbb{P}^2(K)$, e tangenti in ciascuno di essi alla retta per il rimanente punto fondamentale.

(a) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?
(b) Calcolare le polari del punto unità rispetto alle coniche del fascio. Si tratta di un fascio di rette?
(c) Quali sono i punti del piano tali che la loro retta polare è la stessa per tutte le coniche del fascio? Giustificare l'esistenza dei punti trovati anche senza calcoli.

Esercizio 3. In un piano proiettivo siano date tre rette distinte r_1, r_2, r_3 passanti per un punto O, e due rette p, q non contenenti O e la cui intersezione non appartenga alle tre rette precedenti. Detti P_1, P_2, P_3 le intersezioni di p con r_1, r_2, r_3, e Q_1, Q_2, Q_3 le intersezioni di q con r_1, r_2, r_3:

(a) i quarti armonici S_i dopo O, P_i, Q_i (per $i = 1, 2, 3$) sono allineati;
(b) la retta contenente S_1, S_2, S_3 passa per $p \cap q$.
(c) Dualizzare la costruzione e i risultati precedenti.

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_3 - 2X_2X_3$ di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani (vettoriali) in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?
(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; trovare i piani tangenti alla quadrica nei suoi punti di intersezione con la retta $X_0 = 0 = X_3$.
(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$. Scegliendo altri piani, che classificazioni si possono ottenere negli spazi affini complementari?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni retta unita viene indotta una proiettività del fascio di piani di asse quella retta: di che tipo di proiettività si tratta?

(c) Per una retta unita r e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche osculatrici a $X_0X_2 = X_1^2$ nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e passanti per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento canonico di $\mathbb{P}^2(K)$.

(a) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Calcolare i poli della retta impropria rispetto alle coniche del fascio. Che insieme formano questi punti?

(c) Quali sono i punti del piano tali che la loro retta polare è la stessa per tutte le coniche del fascio? Giustificare l'esistenza dei punti trovati anche senza calcoli.

Esercizio 3. Consideriamo un fascio generale di coniche nel piano proiettivo:

(a) date quattro coniche distinte del fascio, possiamo definire il loro birapporto, e come?

(b) Sia A un punto base del fascio, ed r una generica retta per A; è vero o falso che il birapporto di quattro coniche del fascio è uguale al birapporto dei quattro punti di intersezione diversi da A di ciascuna conica sulla retta r?

(c) Sia A un punto base del fascio; è vero o falso che il birapporto di quattro coniche del fascio è uguale al birapporto delle quattro tangenti delle coniche nel punto A?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = 2X_0^2 + X_1^2 - 2X_0X_1 - 4X_2X_3$ di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani (vettoriali) in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; i piani polari dei punti della retta $X_0 = 0 = X_3$ si intersecano in una retta: determinare tale retta, dire se è complanare con la retta di partenza e perché.

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$, determinandone il centro. Scegliendo altri piani, che classificazioni si possono ottenere negli spazi affini complementari?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni retta unita viene indotta una proiettività del fascio di piani di asse quella retta: di che tipo di proiettività si tratta?

(c) Per una retta unita r e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche iperosculatrici a $X_0X_2 = X_1^2$ nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nel riferimento canonico di $\mathbb{P}^2(K)$.

(a) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Calcolare i poli della retta impropria rispetto alle coniche del fascio. Che insieme formano questi punti?

(c) Quali sono i punti del piano tali che la loro retta polare è la stessa per tutte le coniche del fascio? Giustificare l'esistenza dei punti trovati anche senza calcoli.

Esercizio 3. Sia data una conica non degenere $\mathcal{C}$ del piano proiettivo complesso.

(a) Per ogni quaterna ordinata di punti di $\mathcal{C}$, i primi tre distinti, si definisce il birapporto: ricordare la definizione;

(b) dualizzare la definizione del punto precedente, cioè definire il birapporto di una quaterna ordinata di rette tangenti, le prime tre distinte, alla conica $\mathcal{C}$;

(c) data una quaterna di punti di $\mathcal{C}$, è vero o falso che il loro birapporto coincide con quello della quaterna delle tangenti a $\mathcal{C}$ in quei punti (dimostrazione o controesempio)?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = X_1^2 + 2X_0X_1 + X_2^2 + 2X_3^2 - 2X_2X_3$ di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani (vettoriali) in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; i piani polari dei punti della retta $X_2 = 0 = X_3$ si intersecano in una retta: determinare tale retta, dire se è complanare con la retta di partenza e perché.

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$, determinandone il centro. Scegliendo altri piani, che classificazioni si possono ottenere negli spazi affini complementari?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie e/o involuzioni.

(b) Per ogni retta unita viene indotta una proiettività del fascio di piani di asse quella retta: di che tipo di proiettività si tratta?

(c) Per una retta unita r e per ogni punto P di r non unito per ϕ: esiste qualche $k \in \mathbb{N}$ tale che la quaterna $P, \phi P, \phi^2 P, \phi^k P$ sia armonica (e in quale ordine?)?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche iperosculatrici a $X_1X_2 = X_0^2$ nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento canonico di $\mathbb{P}^2(K)$.

(a) Scrivere le coniche degeneri del fascio e l'equazione generale del fascio; esistono piani affini in cui tutte le coniche non degeneri del fascio sono classificate come parabole (risp. iperboli, risp. ellissi)?

(b) Calcolare i poli della retta impropria rispetto alle coniche del fascio. Che insieme formano questi punti?

(c) Quali sono i punti del piano tali che la loro retta polare è la stessa per tutte le coniche del fascio? Giustificare l'esistenza dei punti trovati anche senza calcoli.

Esercizio 3. Sia dato un quadrangolo piano completo;

(a) si dimostri che ogni conica del fascio avente come ciclo base i vertici del quadrangolo interseca ogni retta diagonale in due punti che separano armonicamente i due punti diagonali;

(b) si dimostri che se due punti di una diagonale separano armonicamente i due punti diagonali, allora esiste una conica del fascio avente come ciclo base i vertici del quadrangolo e passante per quei due punti;

(c) dualizzare le asserzioni dei punti precedenti;

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica $Q(X) = X_0X_1 + X_0X_2 + X_2^2 + X_2X_3$ di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani (vettoriali) in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$; i piani polari dei punti della retta $X_0 = 0 = X_1$ si intersecano in una retta: determinare tale retta, dire se è complanare con la retta di partenza e perché.

(c) Classificare affinemente $\mathcal{Q}$ come quadrica affine dello spazio affine complementare di $X_0 = 0$, determinando eventualmente le rette contenute. Scegliendo altri piani, che classificazioni si possono ottenere negli spazi affini complementari?

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g, determinare la segnatura di g e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Trovare un sottospazio isotropo massimale contenente il primo vettore della base canonica. È unico?

(c) Trovare un sottospazio massimale in cui la forma data sia definita positiva e contenente il quarto vettore della base canonica. È unico?

Esercizio 2. Dualizzare e "dimostrare o confutare tramite controesempi" le seguenti affermazioni:

(a) Dati due piani π_1, π_2 e una retta r in $\mathbb{P}^3(K)$, allora $\pi_1 \wedge \pi_2$ è sghembo con r se e solo se $\pi_1 \wedge r \neq \pi_2 \wedge r$.

(b) Dati due piani π_1, π_2 e una retta r in $\mathbb{P}^4(K)$, allora $\pi_1 \wedge \pi_2$ è sghembo con r se e solo se $\pi_1 \wedge r \neq \pi_2 \wedge r$.

(c) Dati tre piani π_1, π_2 e σ in $\mathbb{P}^4(K)$, allora $\pi_1 \wedge \pi_2$ è sghembo con σ se e solo se $\pi_1 \wedge \sigma$ è sghembo con $\pi_2 \wedge \sigma$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

nel riferimento canonico.

(a) Determinare punti e sottospazi uniti per ϕ nei casi $\alpha \neq \beta$ e $\alpha = \beta$.

(b) Nel caso $\alpha \neq \beta$, per un punto P non unito della retta avente due punti uniti si calcoli il birapporto $(P\,\phi(P)\,\phi^2(P)\,\phi^3(P))$.

Esercizio 2. Si considerino le coniche del piano proiettivo passanti per i punti $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, e la cui polare rispetto a $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ sia $X_0 + X_1 = 0$.

(a) Scrivere la matrice del fascio di coniche, determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Che tipo di fasci possono essere determinati dalle condizioni di passaggio per due punti e una condizione di polarità (che non sia di tangenza)?

Esercizio 3. Si consideri la quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ equazione

$$Q(X_0, X_1, X_2, X_3) = 2X_0X_1 + 2X_0X_3 - X_1^2 - 2X_1X_2 - 2X_2^2 \, .$$

(a) Classificare proiettivamente la quadrica, e determinare le rette eventualmente contenute.

(b) Classificare affinemente la quadrica nel complementare di $X_0 = 0$, e trovarne eventuale centro, assi, ed equazione canonica nello spazio euclideo usuale.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per la retta unita r avente un solo punto unito, e per ogni coppia P, Q di punti di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche di $\mathbb{P}^2(K)$ definito dalle condizioni che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia polo della retta $X_0 = 0$, e il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia polo della retta $X_0 + X_1 = 0$.

(a) Scrivere la matrice del fascio di coniche, determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Che tipo di fasci possono essere determinati da due condizioni di polarità (che non siano di tangenza)?

Esercizio 3.

(a) Siano P_1, P_2, Q_1, Q_2 quattro punti distinti di $\mathbb{P}^3(K)$. Mostrare che $P_1 \vee P_2$ è sghemba con $Q_1 \vee Q_2$ se e solo se $P_1 \vee Q_1$ è sghemba con $P_2 \vee Q_2$.

(b) Dualizzare l'enunciato del punto precedente.

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0X_1 - X_1X_2 - X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per una retta unita r e per ogni coppia P, Q di punti di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche di $\mathbb{P}^2(K)$ definito dalle condizioni che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia polo della retta $X_0 = 0$, e di passare per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere la matrice del fascio di coniche, determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Che tipo di fasci possono essere determinati dal passaggio per due punti e da una condizione di polarità (che non sia di tangenza)?

Esercizio 3.

(a) Siano r una retta P_1, P_2 punti distinti non in r di $\mathbb{P}^3(K)$. Mostrare che $P_1 \vee P_2$ è sghemba con r se e solo se $P_1 \vee r \neq P_2 \vee r$. Dualizzare l'enunciato.

(b) Generalizzare l'enunciato a $\mathbb{P}^n(K)$ usando un sottospazio L e due sottospazi M_1, M_2 (della stessa dimensione e sghembi tra loro) che siano sghembi con L: quando $M_1 \vee M_2$ è sghembo con L?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - 2X_2^2 - 2X_0X_2 - 2X_0X_3 - 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per una retta unita r e per ogni coppia P, Q di punti di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definito dalle condizioni che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia polo della retta $X_0 = 0$, e di passare per i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere la matrice del fascio di coniche, determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Che tipo di fasci possono essere determinati dal passaggio per due punti e da una condizione di polarità (che non sia di tangenza)?

Esercizio 3.

(a) Siano date quattro rette a due a due sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Esistono ed eventualmente quante (rette) trasversali comuni?

(b) Dualizzare la domanda e la soluzione del punto precedente.

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + 2X_2^2 - 2X_0X_2 - 2X_0X_3 - 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per una retta unita r e per ogni coppia P, Q di punti di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche di $\mathbb{P}^2(K)$ definito dalle condizioni che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia polo della retta $X_0 = 0$, e di passare per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con tangente $X_0 = X_2$.

(a) Scrivere la matrice del fascio di coniche, determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Che tipo di fasci possono essere determinati da una condizione di tangenza e una di polarità (che non sia di tangenza)?

Esercizio 3.

(a) Siano date quattro rette a due a due sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Esistono ed eventualmente quante (rette) trasversali comuni?

(b) Dualizzare la domanda e la soluzione del punto precedente.

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = -X_0^2 + X_1^2 - X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2 - X_1X_3 - X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per una retta unita r e per ogni punto P non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche di $\mathbb{P}^2(K)$ definito dalle condizioni che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia polo della retta $X_1 = 0$, e di passare per i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere la matrice del fascio di coniche, determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Che tipo di fasci possono essere determinati dal passaggio per due punti e da una condizione di polarità (che non sia di tangenza)?

Esercizio 3.

(a) Siano r una retta P_1, P_2 punti distinti non in r di $\mathbb{P}^3(K)$. Mostrare che $P_1 \vee P_2$ è sghemba con r se e solo se $r = (P_1 \vee r) \wedge (P_2 \vee r)$. Dualizzare l'enunciato.

(b) Generalizzare l'enunciato a $\mathbb{P}^n(K)$ usando un sottospazio L e due sottospazi M_1, M_2 (della stessa dimensione e sghembi tra loro) che siano sghembi con L: $M_1 \vee M_2$ è sghembo con L se e solo se ?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - 2X_1^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_3 - 2X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali; esistono piani in cui la forma indotta è definita positiva (risp. negativa)?

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$.

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g, determinare la segnatura di g e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Trovare un sottospazio isotropo massimale contenente il primo vettore della base canonica. È unico?

Esercizio 2. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

nel riferimento canonico.

(a) Determinare punti e sottospazi uniti per ϕ. È vero che ogni punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ appartiene ad almeno una retta unita? Qual è l'affermazione duale?

(b) Per una retta unita per ϕ avente un solo punto unito P, si calcoli per ogni altro punto Q il birapporto $(P\,\phi(Q)\,\phi^2(Q)\,\phi^{-1}(Q))$.

Problema. Dato un riferimento P_0, P_1, P_2, U di un piano proiettivo, determinare i punti Q del piano tali che le rette $Q \vee P_0, Q \vee P_1, Q \vee P_2, Q \vee U$ formano una quaterna armonica (nell'ordine dato).

Esercizio 1. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha-\beta & -3\alpha \\ \alpha-\beta & 2\beta & -\alpha \\ -3\alpha & -\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?
(b) Nel piano affine usuale, determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.
(c) Al variare delle rette r del piano proiettivo, determinare quante parabole non degeneri contiene il fascio considerato nel piano affine complementare di r.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ equazione

$$Q(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 3X_2^2 + X_3^2 + 2X_0X_1 - 2X_0X_3 + 2X_1X_3\ .$$

(a) Classificare proiettivamente la quadrica, e determinare le rette, eventualmente complesse, contenute.
(b) Nello spazio euclideo usuale, classificare affinemente la quadrica e trovarne l'equazione canonica.
(c) Nello spazio euclideo usuale, determinare quali piani intersecano la quadrica in cerchi.

Problema. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino un punto P e una retta r che non lo contiene. Si descrivano le quadriche formate dai punti X tali che $d(X,P) = kd(X,r)$ con k reale non negativo (rapporto tra le distanze da P e da r è costante), dandone la classificazione euclidea. Quali quadriche euclidee si possono ottenere in questo modo?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte involuzioni.

(b) Per la retta unita r avente un solo punto unito P, e per ogni altro punto Q di r, si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$; in qualche ordine questa quaterna è armonica?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & -\alpha-\beta \\ 0 & -2\alpha & \alpha \\ -\alpha-\beta & \alpha & 2\beta \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Nel piano affine usuale, determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.

Esercizio 3. Siano dati tre punti distinti A, B, C su una retta proiettiva, e siano X, Y, Z i quarti armonici delle terne (A, B, C), (B, C, A) e (C, A, B).

(a) Determinare i quarti armonici dopo X, Y, Z nei vari ordini possibili.

(b) Quali sono le immagini di X, Y, Z tramite la proiettività che manda ordinatamente A, B, C in X, Y, Z?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = -X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_0X_2 + 4X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&2&1&0\\ 0&1&2&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette unite r aventi due punti uniti, e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha-\beta \\ \alpha & \alpha & \alpha+\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta & \alpha-2\beta \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Nel piano affine usuale, determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.

Esercizio 3. Si consideri la proiettività ϕ tra fasci di rette del piano affine che manda la retta r di equazione $\alpha(X-Y)+\beta(Y-1)=0$ nella retta $\phi(r)$ di equazione $\alpha(X-Y-1)-\beta(Y+2)=0$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana della conica i cui punti sono le intersezioni $r \wedge \phi(r)$ al variare di r, e classificare affinemente tale conica.

(b) In generale, sotto quali condizioni su ϕ (proiettività tra fasci di rette nel piano) la conica ottenuta risulta rispettivamente una ellisse, una iperbole, una parabola?

Esercizio 4. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = -X_0^2 + 3X_1^2 + 3X_2^2 + 3X_3^2 + 2X_0X_3 + 2X_1X_2$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X)=0$, determinando in particolare rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Una curva regolare C è un'*elica* se ammette una parametrizzazione regolare $t \mapsto \alpha(t)$ con $\alpha''(t)$ indipendente da $\alpha'(t)$ e le sue rette tangenti formano un angolo costante, non nullo né retto, con una direzione fissata. Diciamo $\vec{a}$ un versore di tale direzione e $0 \neq \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tale angolo. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \alpha(s)$ una parametrizzazione regolare di C con la lunghezza d'arco, e sia $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ il triedro di Frenet di C in $\alpha(s)$. Mostrare che:

(*a*) $\vec{n}(s)$ è ortogonale ad $\vec{a}$.

(*b*) Cambiando eventualmente θ con $-\theta$, si può supporre che

$$\vec{a} = \cos\theta\ \vec{t}(s) + \sin\theta\ \vec{b}(s)\ , \quad \forall s \in I.$$

(*c*) Differenziando la precedente identità, calcolare $k(s)/\tau(s)$.

(*d*) Si consideri, $\forall s \in I$, la retta $r(s)$ per $\alpha(s)$ parallela a $\vec{n}(s)$. Dimostrare che $(u, s) \mapsto \mathbf{x}(u, s) = \alpha(s) + u\,\vec{n}(s)$ dà una parametrizzazione regolare della superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ descritta dalle rette $r(s)$ al variare di $s \in I$.

(*e*) Si supponga d'ora in poi che $\vec{a} = (0, 0, 1)$, versore dell'asse z. Si dimostri che si può riparametrizzare C con z invece di s.

(*f*) Dimostrare che S è superficie regolare. (Suggerimento: le rette $r(s)$ sono parallele al piano xy, quindi z e s non cambiano su $r(s)$.)

Esercizio 2. Si consideri la parametrizzazione del toro T

$$\mathbf{x} : (u, v) \mapsto ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u)\ ,$$

per $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(*a*) Scrivere la prima forma fondamentale su T in funzione di (u, v) (e di a, r). Cioè determinare i coefficienti E, F, G.

(*b*) Descrivere tramite equazioni parametriche $u \mapsto (u, v(u))$ le curve su T che formano un angolo costante $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con tutti i paralleli $u =$ costante. (Suggerimento: dimostrare che $v(u)$ soddisfa a una equazione differenziale della forma

$$\frac{dv}{du} = \frac{A}{B + \cos u}\ ,$$

con A e B costanti; si chiede di determinare A e B in termini di a, r, β.)

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni di $\mathbb{R}$ in sè dotato della topologia prodotto.

(a) Descrivere gli intorni della funzione costante 1.

(b) Sia F il sottinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formato dalle funzioni caratteristiche di insiemi finiti di $\mathbb{R}$. Mostrare che la funzione costante 1 appartiene alla chiusura di F. Descrivere la chiusura di F.

(c) Mostrare che non esistono successioni in F convergenti a 1, e trovare una rete in F convergente a 1.

(d) Si consideri la mappa canonica (immersione diagonale) di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ad ogni numero r si associa la funzione constante r). Si tratta di una funzione continua? È vero o falso che l'immagine è chiusa?

(e) La topologia prodotto è metrizzabile? È definita da una famiglia di pseudometriche?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ i cui aperti sono (il vuoto e) i complementari degli insiemi compatti della topologia usuale di $\mathbb{R}$.

(a) Mostrare che la topologia τ è strettamente meno fine di quella usuale, che essa risulta T_1 ma non T_2, che è separabile.

(b) Mostrare che con la topologia τ l'insieme $\mathbb{R}$ risulta connesso e localmente connesso (pensare all'intersezione di aperti).

(c) Mostrare che con la topologia τ l'insieme $\mathbb{R}$ risulta compatto. Vi sono altri sottinsiemi compatti per τ ma non per la topologia usuale?

(d) Descrivere gli intorni per τ di ogni punto di $\mathbb{R}$ e dedurne che la topologia è (a base) numerabile e localmente numerabile.

(e) Si tratta di uno spazio (pseudo)metrizzabile?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&2&1&0\\ 0&1&2&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ \beta-\alpha & 2\alpha & \beta \\ \alpha-\beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Nel piano affine usuale, determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = 2X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 - X_0X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $xz = 1$ (contenuto nel piano x, z).

(a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S;

(b) calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S;

(c) classificare i punti di S in base alle curvature;

(d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S;

(e) determinare le lossodromiche di S (curve con fissato angolo rispetto ai meridiani).

Esercizio 2. In uno spazio topologico X si definiscono le componenti connesse di un punto come l'unione di tutti i sottinsiemi connessi di X contenenti il punto, e le quasi-componenti connesse di un punto come l'intersezione di tutti i chiusaperti di X contenenti il punto.

(a) Mostrare che sia le componenti che le quasi-componenti sono chiusi di X, ma non necessariamente aperti;

(b) Mostrare che ogni componente è contenuta in una quasi-componente, ma non viceversa; e che le quasi-componenti sono unioni di componenti;

(c) Si consideri il sottinsieme X del piano cartesiano (con la topologia indotta) formato dall'unione delle circonferenze centrate nell'origine e di raggi $1 + \frac{1}{n}$ (per $n = 1, 2, ...$) e dei quattro punti $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. Determinare componenti e quasi-componenti di X.

(d) Mostrare che uno spazio topologico ha una sola componente se e solo se ha una sola quasi-componente.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^{-1} P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\alpha \\ -\beta & 2\beta - \alpha & 2\alpha - \beta \\ -\alpha & 2\alpha - \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Nel piano affine usuale, determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = 2X_0^2 + X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 - 2X_0X_1 + 2X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $x - z^2 = 1$ (contenuto nel piano x, z).

(a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S;

(b) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S

(c) classificare i punti di S in base alle curvature;

(d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S;

(e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

Esercizio 2. In uno spazio topologico X si dice che un sottinsieme è denso se la sua chiusura è X, e che un sottinsieme A di $B \subseteq X$ è denso in B se lo è usando la topologia indotta su B.

(a) Siano $A \subseteq B \subseteq C$ sottinsiemi di X. Mostrare che se A è denso in B e B è denso in C, allora A è denso in C; è vero il viceversa?

(b) Mostrare che l'immagine tramite una funzione continua di un sottinsieme denso non è necessariamente densa; determinare condizioni necessarie e sufficienti sulla funzione affinché ciò succeda;

(c) Mostrare che se X possiede un sottinsieme denso con complementare denso, allora non ha punti isolati;

(d) Mostrare che la frontiera di un chiuso ha complementare denso; è vero per gli aperti? e per sottinsiemi qualsiasi?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^{-1} P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -2\beta & -\alpha \\ -2\beta & 2\alpha + 6\beta & -2\beta \\ -\alpha & -2\beta & \beta \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Nel piano affine usuale, determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - 2X_1^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_3 - 2X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $z = \sin(x)$ per $x \geq 0$ (contenuto nel piano x, z).

(a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S, e gli eventuali punti non regolari;

(b) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S

(c) classificare i punti di S in base alle curvature;

(d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S;

(e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

Esercizio 2. Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice connesso se non è unione di chiusaperti non vuoti disgiunti.

(a) Mostrare che un sottinsieme S di X è connesso (per la topologia indotta) se e solo se non esistono sottinsiemi non vuoti H, K di X tali che $S = H \cup K$, $H \cap \overline{K} = \varnothing = \overline{H} \cap K$.

(b) È vero o falso che un sottinsieme S di X è connesso (per la topologia indotta) se e solo se non esistono sottinsiemi aperti disgiunti H, K di X aventi intersezione non vuota con S e tali che $S \subseteq H \cup K$?
[Sugg.: mostrare quale implicazione è vera, trovare un controesempio per l'altra]

(c) È vero o falso che un sottinsieme S di X è connesso (per la topologia indotta) se e solo se non esistono sottinsiemi chiusi disgiunti H, K di X aventi intersezione non vuota con S e tali che $S \subseteq H \cup K$?
[Sugg.: mostrare quale implicazione è vera, trovare un controesempio per l'altra]

(d) Usando solo la connessione dell'intervallo $I = [0, 1]$ (e le proprietà delle funzioni continue reali) dimostrare che ogni funzione continua di I in sè ha almeno un punto unito.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^{-1} P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & -\alpha \\ -\beta & 2\alpha & \beta \\ -\alpha & \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le coniche degeneri e il ciclo base. Di che tipo di fascio si tratta?

(b) Nel piano affine usuale, determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0X_1 - X_1X_3 - X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro (se c'è) e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $x = \sin(z)$ (contenuto nel piano x, z).

(a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S, e gli eventuali punti non regolari;

(b) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S

(c) classificare i punti di S in base alle curvature;

(d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S;

(e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico.

(a) Diciamo che X è iperconnesso se l'intersezione di qualsiasi due aperti non vuoti è sempre non vuota; mostrare che allora X è connesso.

(b) Diciamo che X è ultraconnesso se l'intersezione di qualsiasi due chiusi non vuoti è sempre non vuota; mostrare che allora X è connesso per archi.

(c) Mostrare che le nozioni di iperconnesso e ultraconnesso sono indipendenti tra loro (cioè nessuna implica l'altra).

(d) Quali proprietà di separazione (T_0, T_1, T_2?) possono avere spazi che siano iperconnessi o ultraconnessi?

(e) Esistono spazi con topologia non banale che siano sia iperconnessi sia ultraconnessi?

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g, determinare la segnatura di g esibendo una base ortogonale contenente l'ultimo vettore della base canonica.

(b) Trovare un sottospazio isotropo massimale contenente il primo vettore della base canonica. È unico? Eventualmente trovarli tutti. Esiste un sottospazio isotropo complementare del precedente? È unico?

Esercizio 2. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

nel riferimento canonico.

(a) Determinare punti e sottospazi uniti per ϕ. Per ogni retta non unita, determinare la sua posizione reciproca con la retta immagine.

(b) Per ogni retta r unita per ϕ si consideri la proiettività indotta sul fascio di piani di asse r; per π piano unito e σ non unito, si determini il birapporto $(\pi\ \sigma\ \phi(\sigma)\ \phi^2(\sigma))$. Quali quaterne opportunamente riordinate sono armoniche? Dare una giustificazione geometrica della loro esistenza.

Problema. Siano π, σ piani distinti in $\mathbb{P}^3(K)$ e $\phi : \pi \to \sigma$ una proiettività. Se $\phi(P) = P$ per ogni $P \in \pi \cap \sigma$ allora esiste un unico punto C (di $\mathbb{P}^3(K)$) tale che ϕ è la proiezione (da π a σ) di centro C?

Generalizzare a due piani in $\mathbb{P}^4(K)$ che si intersecano in un punto.

Generalizzare a due piani sghembi in $\mathbb{P}^5(K)$.

Dualizzare.

Esercizio 1. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche bitangenti a $X_0^2 = 2X_1X_2$ nei due punti di intersezione con la retta $X_0 + X_1 = X_2$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni retta del piano si mostri che l'insieme dei suoi poli per le coniche del fascio è contenuto in una retta; studiare la funzione che ad ogni retta associa l'insieme dei suoi poli.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ equazione

$$Q(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_3 - 2X_2X_3 .$$

(a) Classificare proiettivamente la quadrica, e determinare le rette, eventualmente complesse, contenute.

(b) Nello spazio euclideo usuale, classificare la quadrica e trovarne l'equazione canonica (euclidea) e gli eventuali cerchi contenuti.

Problema. Scrivere la classificazione affine complessa e reale delle quadriche non degeneri in dimensione 4.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^{-1}P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche iperosculatrici a $X_0^2 = 2X_1X_2$ nel suo punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni retta del piano si mostri che l'insieme dei suoi poli per le coniche del fascio è contenuto in una retta; studiare la funzione che ad ogni retta associa l'insieme dei suoi poli.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 - X_2^2 + 2X_3^2 - 2X_0X_2 + 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando attorno all'asse z il profilo $z = x^4 - x^2$ (contenuto nel piano x, z).

(a) Determinare una parametrizzazione e l'equazione cartesiana di S, e gli eventuali punti non regolari;

(b) calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S;

(c) classificare i punti di S in base alle curvature;

(d) determinare le linee di curvatura e le linee asintotiche di S;

(e) determinare le lossodromiche di S (curve che formano angolo costante con i meridiani).

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico, B l'insieme $\{0, 1\}$ dotato della topologia banale, D l'insieme $\{0, 1\}$ dotato della topologia discreta.

(a) Descrivere le topologie prodotto di $X \times B$ e $X \times D$ (descrivere gli aperti e gli intorni di ogni punto); l'identità (insiemistica) è una funzione continua?

(b) Discutere le proprietà di connessione di $X \times B$ e $X \times D$.

(c) Discutere le proprietà di compattezza di $X \times B$ e $X \times D$.

(d) Discutere le proprietà di separazione (T_0, T_1, T_2?) di $X \times B$ e $X \times D$ (in base a quelle di X).

(e) Se X è metrizzabile, cosa si può dire di $X \times B$ e $X \times D$?

Esercizio 1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare in $\mathbb{R}^3$ unitaria (t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ e τ curvatura e torsione, supposte entrambe non nulle). Poniamo $\delta(s)$ la curva descritta (sulla sfera unitaria) dal vettore tangente t (con parametro s).
(a) È vero che δ è curva biregolare? Quando risulta unitaria?
(b) Determinare il riferimento di Frenet di δ in funzione di quello di γ.
(c) Determinare la curvatura κ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ.
(d) Determinare la torsione τ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ.
(e) Determinare quali curve γ danno $\tau_\delta = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'elicoide della retta $z = x$ attorno all'asse z con passo 1, sia σ.
(a) Usando come parametri x e θ, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ, e ridursi poi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da θ, e l'unitarietà delle geodetiche).

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni in $\mathbb{R}$ dotato della topologia (box topology) una cui base è formata dai prodotti (indiciati su $\mathbb{N}$) di aperti di $\mathbb{R}$.

(a) Dimostrare che si tratta di uno spazio hausdorff, non metrizzabile (sugg.: non è localmente numerabile).
(b) Si descrivano gli intorni della successione nulla 0.
(c) Sia I l'insieme I delle successioni infinitesime mai nulle; mostrare che 0 appartiene alla chiusura di I.
(d) Mostrare non esistono successioni in I convergenti a 0, e trovare una rete in I convergente a 0.
(e) La funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che manda r nella successione costante r è continua per la box topology?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della minima topologia τ contenente sia la topologia metrica usuale sia la topologia formata dagli insiemi conumerabili (complementare degli insiemi numerabili).

(a) Mostrare che gli aperti sono formati da aperti usuali tolto un insieme al più numerabile di punti; chi è la chiusura di un tale aperto? Descrivere similmente i chiusi.
(b) Mostrare che si tratta di uno spazio hausdorff non regolare (sugg.: ogni aperto contiene intorni chiusi dei suoi punti?).
(c) Mostrare che un sottinsieme è compatto se e solo se è finito.
(d) Mostrare che lo spazio è connesso ma non connesso per archi.
(e) Mostrare che lo spazio non è localmente numerabile, né separabile.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche osculatrici a $X_0^2 = 2X_1X_2$ nel suo punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passanti per $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Studiare la funzione che ad ogni retta associa l'insieme dei suoi poli rispetto alle coniche del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - X_2^2 + X_0X_1 + X_0X_2 - X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri l'elicoide della curva $z = \log x$ attorno all'asse z con passo 1, sia σ.

(a) Usando come parametri x e θ, si scrivano delle parametrizzazioni per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ, e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da θ, e l'unitarietà delle geodetiche).

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia di Sorgenfrey sinistra avente per base di aperti gli insiemi del tipo $[a, b)$ con $a < b$.

(a) Mostrare che si tratta di una topologia strettamente più fine di quella euclidea, ma non è discreta.

(b) Mostrare che è localmente numerabile, separabile, non (topologicamente) numerabile, non metrizzabile.

(c) Mostrare che è totalmente sconnesso.

(d) Mostrare che i sottinsiemi compatti sono (insiemisticamente) numerabili. Vale il viceversa?

(e) Che relazioni vi sono tra le funzioni di $\mathbb{R}$ in sè continue per la topologia usuale e quelle continue per la topologia di Sorgenfrey (usando la stessa topologia in dominio e codominio)?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.
(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.
(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo generato dalle coniche $X_0^2 = 2X_1X_2$ e $X_2^2 = 2X_0X_1$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Studiare la funzione che ad ogni retta associa l'insieme dei suoi poli.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 - X_3^2 - 2X_0X_2 - 2X_1X_2$$

di $\mathbb{R}^4$
(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri l'elicoide della curva $z = x^2$ (per $x > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ.
(a) Usando come parametri x e θ, si scrivano delle parametrizzazioni e delle equazioni cartesiane per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ, e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da θ, e l'unitarietà delle geodetiche).

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia generata dagli insiemi del tipo $(-\infty, n)$ con $n \in \mathbb{Z}$.
(a) Mostrare che si tratta di una topologia non T_0, né regolare.
(b) Descrivere la chiusura di un qualunque insieme.
(c) Mostrare che lo spazio è connesso per archi e localmente connesso per archi.
(d) Mostrare che gli aperti diversi dallo spazio sono compatti, e che nessun chiuso non vuoto è compatto.
(e) Mostrare che lo spazio è topologicamente numerabile, localmente numerabile, separabile ma non è uno spazio pseudometrizzabile.

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 1&2&1&1 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi^{-1}Q)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche osculatrici a $X_0^2 = 2X_1X_2$ nel suo punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e passanti per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Studiare la funzione che ad ogni retta associa l'insieme (al variare delle coniche nel fascio) dei suoi poli.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_3 - 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri l'elicoide della curva $z^2 = x$ (per $z > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ.

(a) Usando come parametri x e θ, si scrivano delle parametrizzazioni per σ, e una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ, e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da θ, e l'unitarietà delle geodetiche).

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia usuale τ, e sia $\tau_{\mathbb{Q}}$ la topologia (forte) su $\mathbb{R}$ indotta dalla inclusione di $\mathbb{Q}$ (con topologia indotta da τ) in $\mathbb{R}$.

(a) Descrivere la topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$, per esempio caratterizzando gli aperti, mostrando che è strettamente più fine della τ, ma non è discreta.

(b) Con la topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$ lo spazio $\mathbb{R}$ risulta separabile, topologicamente (localmente) numerabile, hausdorff?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di $\mathbb{R}$ dotato della topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$?

(d) Quali sottinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti per la topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$?

(e) La topologia $\tau_{\mathbb{Q}}$ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Si consideri la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè di matrice $A = \begin{pmatrix} 2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&1&2&0\\1&0&1&2 \end{pmatrix}$ in un fissato riferimento.

(a) Determinare tutti gli spazi uniti, indicando su quali spazi vengono indotte omologie.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni punto P di r non unito per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^{-1}P)$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche bitangenti a $X_0^2 = 2X_1X_2$ nei sui punti $\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni retta del piano si mostri che l'insieme dei suoi poli per le coniche del fascio è contenuto in una retta; studiare la funzione che ad ogni retta associa l'insieme dei suoi poli.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + X_1^2 + X_3^2 + X_0X_1 + X_0X_2 - 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri l'elicoide della curva $z = \sin x$ (per $x > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ.

(a) Usando come parametri x e θ, si scrivano delle parametrizzazioni per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ, e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da θ, e l'unitarietà delle geodetiche).

Esercizio 2. Si consideri la mappa $cis : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ (manda x in $\cos(x) + i\sin(x)$) e sia σ la topologia su $\mathbb{R}$ indotta tramite cis dalla topologia usuale di $\mathbb{S}^1$ (a sua volta indotta da quella usuale di $\mathbb{C}$ tramite l'inclusione).

(a) Descrivere la topologia σ, per esempio caratterizzando gli aperti, mostrando che è strettamente meno fine della topologia τ indotta su $\mathbb{R}$ dalla topologia usuale di $\mathbb{C}$, ma non è banale.

(b) Con la topologia σ lo spazio $\mathbb{R}$ risulta separabile, topologicamente (localmente) numerabile, hausdorff, regolare?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di $\mathbb{R}$ dotato della topologia σ?

(d) Quali sottinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti per la topologia σ? In particolare, i compatti sono chusi? $\mathbb{R}$ è compatto?

(e) La topologia σ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g, determinare la segnatura di g esibendo una base ortogonale contenente l'ultimo vettore della base canonica.

(b) Trovare una base di vettori isotropi contenente il primo vettore della base canonica, e scrivere la matrice di g in tale base.

(c) Usando la stessa matrice A nello spazio vettoriale complesso $W = \mathbb{C}^4$, determinare la dimensione dei sottospazi isotropi massimali, e trovare tutti quelli contenenti il primo vettore della base canonica.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$l : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_0 - X_3 = 0 \end{cases} \qquad m : \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \vee \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad n : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_0 + X_3 = 0 \end{cases}$$

dello spazio $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(a) Determinare le posizioni reciproche delle tre rette. Esistono piani che tagliano le tre rette in tre punti allineati? Enunciare anche la domanda duale, e la risposta.

(b) Per ogni punto di m (si usino parametri omogenei λ, μ) determinare l'equazione della retta $t(\lambda, \mu)$ per quel punto e incidente le altre due. Descrivere con un'equazione l'insieme formato dall'unione di queste rette.

(c) Per le rette trovate nel punto (b) sia $L(\lambda, \mu) = t(\lambda, \mu) \wedge l$ il punto di intersezione con la retta l; scelte quattro rette generiche $t(\lambda_i, \mu_i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$), si determini il birapporto dei quattro punti $L(\lambda_i, \mu_i)$ in funzione dei parametri. È vero o falso che tale birapporto rimane costante usando i punti di intersezione con una qualsiasi retta incidente le quattro scelte (per esempio m ed n), e perché?

Problema. Determinare le possibili forme di Jordan di proiettività di $\mathbb{P}^3$ aventi una (unica) retta di punti uniti. Per tali proiettività, determinare la configurazione delle rette unite.

Esercizio 1. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche bitangenti a $X_2^2 = X_0X_1$ nei due punti di intersezione con la retta $X_1 = X_2$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Scelte due coniche non degeneri del fascio, si consideri la funzione che ad ogni punto del piano associa il polo rispetto a una conica della retta polare rispetto all'altra conica del punto dato. Scrivere la matrice di questa proiettività e trovarne la forma di Jordan. Dedurre da questo quali punti del piano hanno polare costante per le coniche del fascio.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ equazione

$$Q(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 3X_2^2 + 2X_0X_3 + X_2X_3 \ .$$

(a) Classificare proiettivamente la quadrica, e determinare le rette, eventualmente complesse, contenute.

(b) Nello spazio euclideo usuale, classificare la quadrica e trovarne l'equazione canonica (euclidea) e gli eventuali cerchi contenuti.

Esercizio 1. Sia ϕ una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè con due sole rette complementari di punti uniti.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e mostrare che per ogni punto P (non unito) dello spazio la retta $P \vee \phi(P)$ è unita.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti distinti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ \phi(P)\ Q\ \phi(Q))$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche iperosculatrici a $X_0^2 = 2X_1X_2$ nel suo punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Scelte due coniche non degeneri del fascio, si consideri la funzione che ad ogni punto del piano associa il polo rispetto a una conica della retta polare rispetto all'altra conica del punto dato. Scrivere la matrice di questa proiettività e trovarne la forma di Jordan. Dedurre da questo quali punti del piano hanno polare costante per le coniche del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = -2X_1^2 - 5X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri l'elicoide della curva $z = \tanh x$ (per $x > 0$) attorno all'asse z con passo 1, sia σ.

(a) Usando come parametri x e θ, si scrivano delle parametrizzazioni per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le curve su σ ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ, e ridursi ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine (sugg.: sfruttando che la prima forma non dipende da θ, e l'unitarietà delle geodetiche).

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia usuale τ, e sia σ la topologia (forte) su $\mathbb{R}^2$ indotta dalla inclusione del sottinsieme $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ (con topologia indotta da τ) in $\mathbb{R}^2$.

(a) Descrivere la topologia σ, per esempio caratterizzando gli aperti, mostrando che è strettamente più fine della τ ma non è discreta.

(b) Con la topologia σ lo spazio $\mathbb{R}^2$ risulta separabile, topologicamente (localmente) numerabile, hausdorff?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia σ?

(d) Quali sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono compatti per la topologia σ?

(e) La topologia σ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare in $\mathbb{R}^3$ unitaria (t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ e τ curvatura e torsione, supposte entrambe non nulle). Poniamo $\delta(s)$ la curva descritta (sulla sfera unitaria) dal vettore binormale b (con parametro s).

(a) È vero che δ è curva biregolare? Quando risulta unitaria?
(b) Determinare il riferimento di Frenet di δ in funzione di quello di γ.
(c) Determinare la curvatura κ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ.
(d) Determinare la torsione τ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ. Quali curve γ danno $\tau_\delta = 0$?
(e) Dire se la curva δ determina la curva γ di partenza (a meno di isometrie dello spazio?).

Esercizio 2. Si consideri la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Usando come parametri u e v, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; quali sono le soluzioni evidenti di questo sistema?

- Sia γ una curva unitaria, con curvatura mai nulla, su σ che incontra ogni generatrice in un punto; mostrare che γ è geodetica se e solo se in ogni suo punto il suo vettore normale è normale alla generatrice.

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni in $\mathbb{R}$, e indichiamo con β la box-topology (i cui aperti sono i prodotti indiciati su $\mathbb{N}$ di aperti di $\mathbb{R}$), e con τ la topologia prodotto.

(a) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni limitate.

(b) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni che evitano un insieme finito F di valori.

(c) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni che assumono solo un insieme finito F di valori.

(d) Trovare chiusura e interno per β e per τ dell'insieme delle successioni strettamente crescenti.

(e) Data una funzione $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, che relazioni vi sono tra la continuità per la box-topology (in entrambi dominio e codominio) e la continuità per la topologia prodotto (in entrambi dominio e codominio)? [dimostrazioni o controesempi]

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia τ indotta dalla famiglia delle inclusioni (nel piano) delle rette per l'origine (usando su tali rette la topologia euclidea usuale), cioè la massima topologia che rende continue tutte le inclusioni.

(a) Mostrare che τ è più fine della topologia euclidea del piano. Per ogni punto di $\mathbb{R}^2$, descrivere una base di intorni della topologia τ.

(b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ: separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ?

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Sia ϕ una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè con due soli punti uniti.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e le configurazioni delle rette unite.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti distinti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi(P)\ \phi(Q))$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche bitangenti a $X_0^2 = 4X_1X_2$ nei sui punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Scelte due coniche non degeneri del fascio, si consideri la funzione che ad ogni punto del piano associa il polo rispetto a una conica della retta polare rispetto all'altra conica del punto dato. Scrivere la matrice di questa proiettività e trovarne la forma di Jordan. Dedurre da questo quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = 2X_0^2 + X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 - 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

(a) Usando come parametri t e s, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono le soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $D^{\mathbb{N}}$, dove D è un insieme finito con topologia discreta, dotato della topologia prodotto τ.

(a) Per ogni punto di $D^{\mathbb{N}}$, descrivere una base di intorni della topologia prodotto.

(b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia prodotto: separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ? Vero o falso che lo spazio è totalmente sconnesso?

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Vero o falso che $D^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo ad un sottinsieme (con la topologia indotta) di $\mathbb{R}$?

Esercizio 1. Sia ϕ una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè con esattamente tre punti uniti.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e le configurazioni delle rette unite.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti distinti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi(P)\ \phi(Q))$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche aventi stesse polari per i punti $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ della conica $X_0^2 = 4X_1X_2$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Scelte due coniche non degeneri del fascio, si consideri la funzione che ad ogni punto del piano associa il polo rispetto a una conica della retta polare rispetto all'altra conica del punto dato. Scrivere la matrice di questa proiettività e trovarne la forma di Jordan. Dedurre da questo quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Si consideri la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$.

(a) Usando come parametri t e s, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono le soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia τ indotta dalla famiglia delle inclusioni (nel piano) delle rette parallele all'asse delle ascisse (usando su tali rette la topologia euclidea usuale), cioè la massima topologia che rende continue tutte le inclusioni.

(a) Mostrare che τ è più fine della topologia euclidea del piano. Per ogni punto di $\mathbb{R}^2$, descrivere una base di intorni della topologia τ.

(b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ: separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ?

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Vero o falso che $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia τ è omeomorfo al prodotto di una retta con topologia euclidea e una con topologia discreta?

Esercizio 1. Sia ϕ una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè avente come punti uniti esattamente quelli di una retta e un punto esterno ad essa.
(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e le configurazioni delle rette unite.
(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti distinti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi(P)\ \phi^{-1}(Q))$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche aventi stesse polari per i punti $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ della conica $X_0^2 = 4X_1X_2$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Scelte due coniche non degeneri del fascio, si consideri la funzione che ad ogni punto del piano associa il polo rispetto a una conica della retta polare rispetto all'altra conica del punto dato. Scrivere la matrice di questa proiettività e trovarne la forma di Jordan. Dedurre da questo quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_3 - 2X_1X_2$$

di $\mathbb{R}^4$.
(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie rigata σ con direttrice $\left(\begin{smallmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ e generatrice $\left(\begin{smallmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{smallmatrix}\right)$.
(a) Usando come parametri t e s, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ indotta dalle inclusioni dei suoi sottinsiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ (entrambi dotati delle topologie indotte da quella usuale di $\mathbb{R}$), cioè la massima topologia che rende continue le due inclusioni.
(a) Mostrare che τ è più fine della topologia usuale di $\mathbb{R}$, e descriverne gli aperti.
(b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ: separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ?
(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Che relazione c'è tra la topologia τ e le due topologie indotte su $\mathbb{R}$ dalle inclusioni di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$?

Esercizio 1. Sia ϕ una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè avente come punti uniti esattamente quelli di una retta.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e le configurazioni delle rette unite.

(b) Per le rette r unite per ϕ, e per ogni coppia di punti distinti P, Q di r non uniti per ϕ: si determini il birapporto $(P\ Q\ \phi^{-1}(P)\ \phi^{-1}(Q))$; esistono quaterne di questo tipo armoniche?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo formato dalle coniche aventi stesse polari della conica $X_0^2 = 4X_1X_2$ per tutti i punti della retta $X_1 = 0$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Scelte due coniche non degeneri del fascio, si consideri la funzione che ad ogni punto del piano associa il polo rispetto a una conica della retta polare rispetto all'altra conica del punto dato. Scrivere la matrice di questa proiettività e trovarne la forma di Jordan. Dedurre da questo quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_2 + 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$.

(a) Usando come parametri t e s, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ indotta dalle inclusioni dei suoi sottinsiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ (entrambi dotati delle topologie indotte da quella usuale di $\mathbb{R}$), cioè la massima topologia che rende continue le due inclusioni.

(a) Mostrare che τ è più fine della topologia usuale di $\mathbb{R}$, e descriverne gli aperti.

(b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ: separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ?

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? Che relazione c'è tra la topologia τ e le due topologie indotte su $\mathbb{R}$ dalle inclusioni di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$?

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g, determinare la segnatura di g esibendo una base ortogonale contenente il primo vettore della base canonica.

(b) Trovare una base di vettori isotropi contenente il secondo vettore della base canonica, e scrivere la matrice di g in tale base.

(c) Descrivere tutte le isometrie per g che fissano il secondo e il quarto vettore della base canonica (sugg.: si tratta di vettori ortogonali tra loro, uno isotropo e l'altro non isotropo).

Esercizio 2. Si consideri in un piano proiettivo un triangolo di vertici A, B, C (punti non allineati). Siano A'', B'', C'' tre punti rispettivamente sui lati $a = B \vee C$, $b = A \vee C$, $c = A \vee B$ (diversi dai vertici), e siano A', B', C' i quarti armonici rispettivamente dopo B, C, A'' su a, A, C, B'' su b, A, B, C'' su c.

(a) Mostrare che A'', B'', C'' sono punti allineati se e solo se $A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ sono rette concorrenti.

(b) Dualizzare la costruzione e l'enunciato del punto precedente.

(c) L'enunciato del punto (a) rimane vero se invece dei quarti armonici si costruiscono i tre punti A', B', C' in modo che i birapporti (B, C, A'', A'), (A, C, B'', B'), (A, B, C'', C') siano (non banali e) uguali tra loro?

Problema. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha due rette sghembe di punti uniti. Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti.

Esercizio 1. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo generato dalle coniche di equazioni $X_0^2 - 2X_1X_2 = 0$ e $3X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_0X_2 - 2X_1X_2 = 0$.

(*a*) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(*b*) Nel piano affine usuale, classificare le coniche del fascio, e determinare il luogo dei centri delle coniche a centro.

(*c*) Si consideri l'insieme $\mathcal{F}^*$ delle coniche duali delle coniche del fascio $\mathcal{F}$; usando opportune coordinate nello spazio proiettivo delle coniche del piano duale, dare equazioni cartesiane per l'insieme $\mathcal{F}^*$ e dire se si tratta di un fascio di coniche (del piano duale).

Esercizio 2. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ consideriamo le due rette r e s di equazioni rispettivamente $X_1 = 0 = X_2$ e $X_0 - X_1 = 0 = X_2 - X_3$ (si controlli che sono sghembe), e la proiettività ϕ tra i fasci di piani di assi r e s ottenuta mandando il piano $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0$ nel piano $\alpha(X_0 - X_1) + \beta(X_2 - X_3) = 0$.

(*a*) Trovare l'equazione cartesiana della quadrica $\mathcal{Q}$ formata dalla unione delle rette $\pi \wedge \phi(\pi)$ al variare di π nel fascio di asse r. Determinare tutte le rette contenute in $\mathcal{Q}$.

(*b*) Nello spazio euclideo usuale, classificare la quadrica $\mathcal{Q}$ e trovarne l'equazione canonica (euclidea) e il riferimento in cui l'equazione è quella canonica, e gli eventuali cerchi contenuti.

(*c*) In generale, se ϕ è proiettività tra due fasci di piani (di assi due rette affini sghembe tra loro), dare condizioni necessarie e sufficienti affinché $\mathcal{Q}$ sia classificato come paraboloide o iperboloide.

Problema. Date due rette sghembe r, s in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, si consideri l'insieme dei punti P tali che $d(P, r) = kd(P, s)$ con k reale positivo. Di che insiemi si tratta? È vero o falso che tutte le quadriche rigate di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si possono ottenere con questa costruzione?

Esercizio 1. Date due rette incidenti distinte r, r', siano A, B, C tre punti su r e A', B', C' tre punti su r' tutti distinti e diversi da $r \wedge r'$.
(a) Dimostrare che $A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ sono rette concorrenti in un punto se e solo se $(A\ B\ C\ r \wedge r') = (A'\ B'\ C'\ r \wedge r')$.
(b) Dualizzare l'enunciato nel piano e nello spazio.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo generato dalle coniche $X_0X_2 - X_1^2$ e $X_2^2 - 2X_0X_2 + X_0^2$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Per ogni retta del piano, si studi il luogo dei poli delle coniche non degeneri del fascio.
(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; si tratta di un fascio di coniche (del piano duale), ed eventualmente di che tipo?

Esercizio 3. Siano dati un piano π e un punto P che non si appartengono in uno spazio euclideo di dimensione 3.
(a) Determinare l'equazione cartesiana soddisfatta dai punti X tali che $d(X, \pi) = kd(X, P)$ con k reale non negativo, e si classifichino tali quadriche.
(b) Quali quadriche dello spazio euclideo si possono ottenere con queste condizioni, e come identificare piani e punti che le realizzano?

Esercizio 1. Sia data la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$.
(a) Usando come parametri t e s, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione σ.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Vero o falso che σ è localmente isometrica al piano euclideo?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ indotta dalla mappa $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ che manda ogni numero nella sua parte intera (massimo intero minore o uguale al numero dato), cioè la minima topologia che rende continua ϕ (su $\mathbb{Z}$ si consideri la topologia discreta).
(a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con le topologie euclidea e di Sorgenfrey.
(b) Quali proprietà di separazione possiede la topologia τ: separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?
(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ?
(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ? Lo spazio è compatto e/o localmente compatto?
(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare unitaria in $\mathbb{R}^3$ (t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ e τ curvatura e torsione, supposte entrambe non nulle).

(a) Esistono curve β che abbiano il versore $b(s)$ come versore tangente? Determinare riferimento di Frenet, curvatura e torsione di tali curve.

(b) Esistono curve α che abbiano il versore $n(s)$ come versore tangente? Determinare riferimento di Frenet, curvatura e torsione di tali curve.

(c) Le curve dei punti precedenti sono uniche, eventualmente a meno di quali trasformazioni? Esse determinano la curva di partenza γ, eventualmente a meno di quali trasformazioni?

Esercizio 2. Si consideri la superficie σ formata dalla unione delle rette tangenti all'elica cilindrica $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ \theta\end{smallmatrix}\right)$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Scrivere una parametrizzazione di σ usando come parametri u e θ.

(a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(c) Per le linee coordinate della parametrizzazione data, determinare la famiglia delle curve ortogonali su σ.

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? La superficie è localmente isometrica al piano?

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni di $\mathbb{R}$ in sé, dotato della topologia prodotto (per la topologia usuale di $\mathbb{R}$).

(a) Trovare chiusura e interno dell'insieme delle funzioni continue.

(b) Trovare chiusura e interno dell'insieme delle funzioni caratteristiche dei punti di $\mathbb{R}$.

(c) Trovare chiusura e interno dell'insieme delle funzioni ϕ tali che $\phi(0) > 0$.

(d) Determinare se la funzione di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in sé che manda una funzione f nel suo quadrato (cioè manda f nella funzione $x \mapsto f(x)^2$) è continua.

(e) Determinare se la funzione di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in sé che manda una funzione f in $f \circ f$ (cioè manda f nella funzione $x \mapsto f(f(x))$) è continua.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia τ indotta dalla famiglia delle inclusioni (nel piano) delle circonferenze di centro l'origine (e raggi maggiori o uguali a 0, usando su tali circonferenze la topologia euclidea usuale), cioè la massima topologia che rende continue tutte le inclusioni.

(a) Mostrare che τ è più fine della topologia euclidea del piano. Per ogni punto di $\mathbb{R}^2$, descrivere una base di intorni della topologia τ.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ? Descrivere le componenti connesse per τ.

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Si consideri la funzione $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ definita da $p(\rho, \binom{\cos\theta}{\sin\theta}) = \binom{\rho\cos\theta}{\rho\sin\theta}$. Usando la topologia τ nel codominio, che topologia viene indotta da p nel dominio? Usando la topologia prodotto (di quelle euclidee usuali) nel dominio, quale topologia viene indotta nel codominio?

Esercizio 1. Date due rette sghembe r, s in $\mathbb{P}^3(K)$, per ogni punto P non appartenente alle due rette, definiamo il punto P' sulla retta che interseca P, r, s e tale che il birapporto dei quattro punti R, S, P, P' sia $\lambda \in K$ fissata costante diversa da $0, 1$ (R ed S sono i punti di intersezione con r ed s risp.).

(a) Dimostrare che la mappa che manda P in P' si estende ad una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$, e determinarne le possibili forme di Jordan.

(b) Dualizzare l'enunciato. Generalizzare l'enunciato in $\mathbb{P}^n(K)$.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo bitangente alle rette $X + Y = 0$ e $Y = 1$ nei loro punti di intersezione con la retta $X = 1$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni punto P del piano che non abbia polare costante, si calcoli P' il centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio; la funzione che manda P in P' si estende ad una proiettività?

(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; si tratta di un fascio di coniche (del piano duale), ed eventualmente di che tipo?

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 - X_2^2 + X_3^2$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di rotazione σ con profilo $x = 2 + \sin z$ (attorno all'asse delle z).

(a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee lossodromiche di σ (curve che formano angolo costante con i profili).

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ generata dalle semirette aperte $(-\infty, a)$ con $a > 0$ e $(b, +\infty)$ con $b < 0$.

(a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con la topologia euclidea.

(b) La topologia τ è separabile, localmente numerabile, numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? In particolare, descrivere la chiusura per τ dei punti. La topologia τ è pseudometrizzabile?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) A quali punti convergono le successioni $x_n = \frac{1}{n+1}$ e $y_n = \frac{n}{n+1}$?

Esercizio 1. Date due rette sghembe r, s in $\mathbb{P}^3(K)$, per ogni punto P non appartenente alle due rette, definiamo il punto P' sulla retta che interseca P, r, s e tale che il birapporto dei quattro punti R, S, P, P' sia $\lambda \in K$ fissata costante diversa da $0, 1$ (R ed S sono i punti di intersezione con r ed s risp.).

(a) Dimostrare che la mappa che manda P in P' si estende ad una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$, e determinarne le possibili forme di Jordan.

(b) Dualizzare l'enunciato. Generalizzare l'enunciato in $\mathbb{P}^n(K)$.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo tali che la retta $X = 1$ sia polare del punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ e la retta $Y = 1$ sia polare del punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni punto P del piano, si calcoli P' il centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio; la funzione che manda P in P' è una proiettività?

(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; si tratta di un fascio di coniche (del piano duale), ed eventualmente di che tipo?

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - X_2^2 - 2X_0X_2 - 4X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie elicoidale σ con profilo $x = e^{-z}$ (attorno all'asse delle z con passo unitario).

(a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ generata dalle semirette aperte $(-\infty, a)$ con $a < 0$ e $(b, +\infty)$ con $b > 0$.

(a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con la topologia euclidea.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? Descrivere le chiusure dei punti.

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? A quali punti converge la successione $x_n = n$? e la successione $y_n = (-1)^n n$?

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^3$ in sè ha una retta r di punti uniti, e una retta unita s (non di punti uniti) incidente r, e non ha punti uniti fuori di r ed s.
(a) Trovare tutte le possibili forme di Jordan di ϕ.
(b) Per ciascuna di esse, discutere la configurazione delle rette unite.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo tali che la retta $X = 1$ sia polare del punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ e la retta $Y = 1$ sia polare del punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Per ogni punto P del piano, si calcoli P' il centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio; la funzione che manda P in P' è una proiettività?
(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; si tratta di un fascio di coniche (del piano duale), ed eventualmente di che tipo?

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - X_2^2 - 2X_0X_2 - 4X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.
(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie rigata σ con profilo $\left(\begin{smallmatrix}0\\t\\t^3\end{smallmatrix}\right)$ e direzioni $\left(\begin{smallmatrix}1-t\\t\\0\end{smallmatrix}\right)$.
(a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ generata dagli insiemi conumerabili.
(a) Descrivere gli aperti di τ e dire se è comparabile con la topologia euclidea.
(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate?
(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?
(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ? Lo spazio è compatto e/o localmente compatto?
(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare? A quali punti converge la successione $x_n = n$?

Esercizio 1. Sia ϕ una proiettività di $\mathbb{P}^3(K)$ in sè avente tre rette unite (non di punti uniti) complanari, e nessun altro punto unito fuori del piano delle tre rette.
(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e, per ciascuna, le configurazioni delle rette unite.
(b) In quali dei casi precedenti vi sono dei piani in cui ϕ induce una involuzione?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo tali che la retta $X + Y + 1 = 0$ sia polare del punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e la retta $X + Y - 1 = 0$ sia polare del punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Per ogni punto P del piano, determinare l'insieme delle rette polari per le coniche del fascio.
(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; si tratta di un fascio di coniche (del piano duale), ed eventualmente di che tipo?

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + 3X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 + 2X_0X_1 - 2X_0X_3 + 4X_1X_2$$

di $\mathbb{R}^4$.
(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie elicoidale ottenuta dal profilo $z = x + \sin(x)$ (attorno all'asse z, con passo 1).
(a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ dotato della topologia τ prodotto delle topologie discrete su $\{0, 1\}$.
(a) Descrivere gli aperti di τ; è vero che τ ammette una base di chiusaperti?
(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?
(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(e) La funzione $\mathbb{R} \to X$ cha manda ogni $x \in \mathbb{R}$ nella sua funzione caratteristica è continua (usando la topologia usuale su $\mathbb{R}$)? Se no, qual è la minima topologia su $\mathbb{R}$ che rende continua tale funzione?

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g, e determinare la segnatura di g esibendo una base ortogonale.

(b) Trovare una base di vettori isotropi contenente i primi due vettori della base canonica, e scrivere la matrice di g in tale base.

(c) Descrivere tutte le (matrici delle) isometrie per g che hanno come autovettori i primi due vettori della base canonica.

Esercizio 2. Si considerino in un piano proiettivo due triangoli prospettivi di vertici A, B, C e A', B', C' (lati a, b, c e a', b', c' come usuale), e sia O il punto di prospettività. Poniamo

$$\begin{aligned} \overline{A} &= OA \wedge BC & & & \overline{A}' &= OA' \wedge B'C' \\ \overline{B} &= OB \wedge AC & &\text{e} & \overline{B}' &= OB' \wedge A'C' \\ \overline{C} &= OC \wedge AB & & & \overline{C}' &= OC' \wedge A'B' \end{aligned}$$

(si tratta dei punti di intersezione dei lati dei triangoli con le rette da O).

(a) Mostrare che

$$(\overline{A}\ B\ C\ a \wedge a') = (\overline{A}'\ B'\ C'\ a \wedge a')$$

e analogamente per gli altri lati (scrivere le uguaglianze).

(b) Mostrare che la retta di omologia (passante per $a \wedge a'$, $b \wedge b'$, $c \wedge c'$) passa per il punto di prospettività O se e solo se

$$(\overline{A}\ B\ C\ a \wedge a') = (A\ \overline{B}\ C\ b \wedge b') = (A\ B\ \overline{C}\ c \wedge c')$$

(basta una delle uguaglianze?).

(c) Nel caso precedente, trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché i quattro punti sulla retta di omologia formino una quaterna armonica (in qualche ordine).

Problema. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha (esattamente) due punti uniti. Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione di rette e piani uniti.

Esercizio 1. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono tangenti alla retta $X_1+X_2=0$ nel punto P_0 e passano per gli altri due punti fondamentali P_1, P_2 del riferimento dato.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(b) Su ogni retta del fascio per P_0 si mandi il punto P di $\mathcal{C}$ diverso da P_0 nel punto P' di $\mathcal{C}'$ diverso da P_0, dove $\mathcal{C}'$ è la quarta armonica nel fascio di coniche dopo le due degeneri e la conica $\mathcal{C}$: si tratta di una proiettività? di una involuzione?

(c) Si consideri l'insieme $\mathcal{F}^*$ delle coniche duali delle coniche del fascio $\mathcal{F}$; usando opportune coordinate nello spazio proiettivo delle coniche del piano duale, dare equazioni cartesiane per l'insieme $\mathcal{F}^*$ e dire se si tratta di un fascio di coniche (del piano duale).

Esercizio 2. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ consideriamo le due rette r e s di equazioni rispettivamente $X_1=0=X_2$ e $X_0-X_1=0=X_2-X_3$ (si controlli che sono sghembe), e la proiettività ϕ tra esse data da $\phi\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\\beta\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$.

(a) Trovare l'equazione cartesiana della quadrica $\mathcal{Q}$ formata dalla unione delle rette $P\vee\phi(P)$ al variare di P in r. Determinare tutte le rette contenute in $\mathcal{Q}$.

(b) Nello spazio euclideo usuale, classificare la quadrica $\mathcal{Q}$ e trovarne l'equazione canonica (euclidea) e il riferimento in cui l'equazione è quella canonica, e gli eventuali cerchi contenuti.

(c) In generale, se ϕ è proiettività tra due rette affini (sghembe tra loro), dare condizioni necessarie e sufficienti affinché $\mathcal{Q}$ sia classificato come paraboloide o iperboloide.

Per trovare l'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$ si può procedere in vari modi, che hanno in comune il problema di eliminare alcuni parametri da equazioni parametriche: i punti X appartenenti a $\mathcal{Q}$ devono appartenere a qualche retta $\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\\beta\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\beta\\\beta\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$ (per qualche valore $\alpha,\beta\neq 0,0$), quindi essere del tipo (per qualche $\lambda,\mu\neq 0,0$)

$$\begin{cases}X_0=\lambda\alpha+\mu\beta\\X_1=\mu\beta\\X_2=\mu\alpha\\X_3=\lambda\beta+\mu\alpha\end{cases}\quad \textit{ovvero}\quad \begin{pmatrix}X_0\\X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\alpha\\\lambda\beta\\\mu\alpha\\\mu\beta\end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix}\lambda\alpha\\\lambda\beta\\\mu\alpha\\\mu\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_0-X_1\\X_3-X_2\\X_2\\X_1\end{pmatrix}$$

(basta invertire la matrice), e usando che $(\lambda\alpha)(\mu\beta)=(\lambda\beta)(\mu\alpha)$ si ottiene l'equazione $(X_0-X_1)X_1=(X_3-X_2)X_2$.

In alternativa si può esplicitare un sistema cartesiano per la retta (ovviamente in funzione di α,β), o eliminando λ,μ dal sistema precedente, oppure direttamente imponendo la condizione di rango $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}X_0&\alpha&\beta\\X_1&0&\beta\\X_2&0&\alpha\\X_3&\beta&\alpha\end{pmatrix}=2$ *che, con due minori d'ordine 3 e piccole sostituzioni (per essere lineare in α,β), dà*

$$\begin{cases}\alpha X_1-\beta X_2=0\\\beta X_0-\beta X_1+\alpha X_2-\alpha X_3=0\end{cases}\qquad \textit{ovvero}\qquad \begin{pmatrix}X_1&-X_2\\X_2-X_3&X_0-X_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ed essendo α,β soluzione non nulla, dev'essere nullo il determinante, che dà l'equazione $X_1(X_0-X_1)+X_2(X_2-X_3)=0$.

Per trovare l'equazione delle rette senza usare i 4 parametri, si poteva anche trovare le equazioni dei due piani $\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\\beta\end{pmatrix}\vee s$ (imponendo ai piani del fascio per s il passaggio per il punto) e $\begin{pmatrix}\beta\\\beta\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}\vee r$ (similmente), che dà subito espressioni lineari in α,β.

Problema. Data una quadrica $\mathcal{Q}$ non degenere in $\mathbb{P}^3(K)$, si consideri per ogni retta $r=P\vee Q$ la retta polare rispetto alla quadrica $r^\perp=p\wedge q$ (dove p e q sono i piani polari di P e Q risp.). Discutere le posizioni reciproche di r ed $r^\perp$. *[sugg.: distinguere a seconda della relazione di r con $\mathcal{Q}$.]*

Risultato: r è contenuta, tangente, secante $\mathcal{Q}$ a seconda che r sia uguale, incidente, sghemba con $r^\perp$, a seconda che $r^\perp$ sia contenuta, tangente, secante $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Siano dati due triangoli A, B, C e A', B', C' del piano proiettivo.
(a) Determinare tutte le proiettività che mandano ordinatamente il primo triangolo nel secondo.
(b) In quali casi tra le proiettività precedenti vi sono omologie (speciali e/o generali)?
(c) In quali casi tra le proiettività precedenti vi sono involuzioni?

Nota post-compito sulla soluzione: nel primo punto era importante accorgersi che le proiettività in questione non erano uniche, ma dipendevano da due parametri.

Il secondo punto ha chiaramente a che fare con il teorema di Desargues sui triangoli prospettivi/omologici.

Il terzo punto si può scrivere bene in termini di birapporti.

Naturalmente le migliori risposte dovevano essere scritte in termini "geometrici", cioè in termini dei triangoli di partenza e delle loro relazioni.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo osculatrici alla conica $X_1^2 - 2X_0X_2$ nel suo punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ e passanti per il punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Per ogni punto P del piano, determinare se possibile il punto P' centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio. Cosa si può dire della funzione cha manda P in P'?
(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + 2X_0X_1 - X_2^2 + X_3^2 + 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.
(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie elicoidale ottenuta dal profilo $z = x + \cos(x)$ (attorno all'asse z, con passo 1).
(a) Si scrivano delle parametrizzazioni per σ e si trovi una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dotato della topologia τ prodotto delle topologie discrete su $\mathbb{N}$.
(a) Descrivere gli aperti di τ; è vero che τ ammette una base di chiusaperti?
(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ? Quali sono le funzioni continue di $\mathbb{R}$ (con topologia usuale) in X?
(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(e) È continua la funzione di X in sè che ad ogni elemento associa la successione nulla se è limitato e l'elemento stesso altrimenti?

Esercizio 1. Sia $\gamma = \gamma(s)$ una curva regolare unitaria in $\mathbb{R}^n$ ($e_1, \ldots, e_n$ il suo riferimento di Fŕenet, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ le curvature, supposte tutte mai nulle).

(a) Dato un punto $P \in \mathbb{R}^n$, definiamo le funzioni $a_i(s) = (\gamma - P) \cdot e_i$. Mostrare che tali funzioni soddisfano al sistema differenziale

$$\begin{pmatrix} a'_1 - 1 & a'_2 & \cdots & a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} K$$

dove K è la matrice di Frénet di γ.

[Sugg.: partire dal sistema di Frénet e moltiplicare scalarmente per $(\gamma - P)$*]*

(b) Mostrare che la curva γ è sferica (cioè è contenuta in una sfera di $\mathbb{R}^n$) se e solo se le seguenti condizioni equivalenti (tra loro) sono soddisfatte:

(1) esiste $P \in \mathbb{R}^n$ tale che $a_1 = 0$ e $a_2^2 + \cdots + a_n^2 = R^2$ (costante);

(2) esiste $P \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema del punto (a) è della forma

$$\begin{pmatrix} -1 & a'_2 & \cdots & a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} K \ ;$$

(3) le curvature $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ soddisfano ad una relazione dedotta dall'ultima delle equazioni del punto (2).

[Sugg.: scrivere e risolvere ricorsivamente il sistema in (2)*]*

(c) Nei casi $n = 2, 3, 4$ esplicitare le relazioni precedenti (punto (b3)) tra le curvature affinché la curva γ sia sferica.

Esercizio 2. Sia $\gamma(s)$ una curva piana regolare unitaria, e si consideri la superficie $\sigma(s, t)$ formata dalla unione delle curve che si ottengono traslando γ nella direzione $tv + \sin(t)w$ dove v è versore ortogonale al piano di γ e w versore del piano di γ. Mostrare che si può ottenere una parametrizzazione di σ della forma

$$\sigma(s, t) = \begin{pmatrix} x(s) + \sin(t) \\ y(s) \\ t \end{pmatrix}$$

con $x_s^2 + y_s^2 = 1$.

(a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(c) Determinare la famiglia delle curve ortogonali delle linee coordinate della parametrizzazione data su σ.

(d) Determinare (equazioni differenziali per) le linee asintotiche e le linee di curvatura di σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ. Vi sono linee coordinate che siano anche geodetiche? Vi sono casi in cui σ è localmente isometrica al piano?

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, dove $\mathbb{R}^n$ è considerato come sottinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ con equazione $X_{n+1} = 0$ (ultima coordinata nulla), dotato della topologia indotta dalle inclusioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (su ogni $\mathbb{R}^n$ si usi la topologia euclidea usuale).

(a) Descrivere aperti e chiusi della topologia di $\mathbb{R}^\infty$, in particolare dire se i sottinsiemi $\mathbb{R}^n$ sono aperti e/o chiusi. Per ogni sottinsieme A di $\mathbb{R}^\infty$, descrivere chiusura e interno.

(b) Discutere le proprietà di separabilità e numerabilità di $\mathbb{R}^\infty$, e dedurne che non è pseudo-metrizzabile.

(c) Mostrare che il sottinsieme $[0,1]^\infty$ (scrivere la definizione esplicita) è chiuso ma non compatto. Descrivere i sottinsiemi compatti di $\mathbb{R}^\infty$.

(d) Sia e_i l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ (per $i \leq n$). La successione $n \mapsto e_n$ converge a qualche elemento di $\mathbb{R}^\infty$? E la successione $n \mapsto \frac{1}{n}e_n$? Quali successioni in $\mathbb{R}^\infty$ convergono a 0? Esistono reti non definitivamente 0 e convergenti a 0?

(e) Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^\infty$, definiamo la loro distanza $d_\infty(x, y) = d_n(x, y)$ se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $d_n(x, y) = |y-x|$ è la loro distanza usuale in $\mathbb{R}^n$. Mostrare che d_∞ è una pseudometrica continua per lo spazio $\mathbb{R}^\infty$, ma che la topologia di $\mathbb{R}^\infty$ è strettamente più fine della topologia indotta dalla metrica d_∞.

Esercizio 2. Si consideri il sottinsieme X di $\mathbb{R}^2$ formato dalla unione delle circonferenze C_n di raggio $1/n$ e centro $(1/n, 0)$ al variare di n in $\mathbb{N}_{>0}$ (passano tutte per l'origine, farsi un disegno), con la topologia τ indotta da quella usuale del piano reale.

(a) Descrivere aperti e chiusi della topologia τ, in particolare dire se le circonferenze C_n sono aperti e/o chiusi.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ?

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Consideriamo ora su X la topologia σ indotta dalle inclusioni dei C_n in X, cioè la massima topologia che rende continue tutte le inclusioni. Discutere le relazioni tra τ e σ.

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ in sè ha due rette sghembe di punti uniti, e nessun altro punto unito.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e la configurazione degli iperpiani uniti, specificando la posizione con le rette di punti uniti.

(b) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un iperpiano unito?

(c) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un piano unito?

(d) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno una retta unita?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo che sono bitangenti alla conica $X_1^2 - 2X_0X_2$ nei suoi punti $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni punto P del piano, determinare se possibile il punto P' centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio. Cosa si può dire della funzione cha manda P in P'?

(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_2^2 - 2X_0X_2 - 4X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(s,\theta) = \begin{pmatrix} s\cos\theta \\ s\sin\theta \\ z(\theta)\end{pmatrix}$ ove $z(\theta)$ è funzione strettamente crescente di classe almeno 2.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ (funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}$) dotato della topologia τ prodotto delle topologie discrete su $\mathbb{Z}$.

(a) Descrivere gli aperti di τ; è vero che τ ammette una base di chiusaperti?

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La funzione $\mathbb{R} \to X$ cha manda ogni $x \in \mathbb{R}$ nella [funzione costante data dalla] sua parte intera è continua (usando la topologia usuale su $\mathbb{R}$)? Se no, qual è la minima topologia su $\mathbb{R}$ che rende continua tale funzione?

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ in sè ha come punti uniti tutti e soli quelli di un fissato piano.
(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e la configurazione degli iperpiani uniti, specificando la posizione con il piano di punti uniti.
(b) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno una retta unita?
(c) È vero che ogni retta di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ è contenuta in almeno un iperpiano unito?
(d) Caratterizzare i piani di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ che sono contenuti in almeno un iperpiano unito.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo generato dalle coniche di equazioni $2X_0X_1 = X_2^2$ e $2X_0X_2 = X_1^2$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Per ogni punto P del piano, determinare se possibile il punto P' centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio. Cosa si può dire della funzione cha manda P in P'?
(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_3 - 4X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.
(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(s,\theta) = \begin{pmatrix} \theta + s\cos\theta \\ s\sin\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.
(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri il sottinsieme X di $\mathbb{R}^2$ complementare delle rette per l'origine con coefficiente angolare razionale, dotato della topologia τ indotta da quella usuale di $\mathbb{R}^2$.
(a) Descrivere gli aperti di τ; è vero che τ ammette una base di chiusaperti?
(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ? Quali sono le componenti connesse e connesse per archi di X? Si tratta di chiusaperti?
(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(e) Si consideri su X la massima topologia σ che rende continue le inclusioni delle rette per l'origine. Confrontare τ e σ; in particolare, hanno le stesse proprietà di connessione?

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ in sè ha come punti uniti tutti e soli quelli di un fissato piano e di una fissata retta tra loro sghembi.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e la configurazione degli iperpiani uniti, specificando la posizione con il piano di punti uniti.
(b) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa una retta unita?
(c) È vero che ogni retta di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ è contenuta in almeno un piano unito?
(d) si mostri che la proiettività ϕ è definita da un unico invariante scalare, e lo si interpreti come birapporto.

Esercizio 2. Si consideri nel piano proiettivo il fascio di coniche che sono iperosculatrici alla conica di equazione $X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 = 0$ nel suo punto di coordinate $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Per ogni punto P del piano, determinare se possibile il punto P' centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio. Cosa si può dire della funzione cha manda P in P'?
(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = 2X_0^2 + X_2^2 - 2X_0X_2 - 4X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(s,\theta) = \begin{pmatrix} s\cos\theta \\ s\sin\theta \\ \theta + s\theta \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri su $\mathbb{R}$ la topologia τ indotta dalle due inclusioni di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ (dotati delle usuali topologie indotte da $\mathbb{R}$).

(a) Descrivere gli aperti di τ e confrontare τ con la topologia usuale di $\mathbb{R}$.
(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate?
(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ? Quali sono le componenti connesse e connesse per archi di X? Si tratta di chiusaperti?
(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ in sè ha come punti uniti tutti e soli quelli di un fissato piano e un punto esterno a quel piano.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e la configurazione degli iperpiani uniti, specificando la posizione con il piano di punti uniti.
(b) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un piano unito?
(c) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno una retta unita?
(d) Per ogni retta unita, e per un suo punto non unito P, quali sono i possibili valori del birapporto $(P\,\phi(P)\,\phi^2(P)\,\phi^3(P))$?

Esercizio 2. Si consideri nel piano proiettivo il fascio di coniche tangenti alla conica di equazione $X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 = 0$ nel suo punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e passanti per i due punti $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(b) Per ogni punto P del piano, determinare se possibile il punto P' centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio. Cosa si può dire della funzione cha manda P in P'?
(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = 3X_1^2 + X_2^2 + 3X_3^2 - 2X_0X_2 - 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(s,t) = \begin{pmatrix} s \\ t^2 \\ s^2+t \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ.

Esercizio 2. Si consideri il sottinsieme $X = \mathbb{R}/\sim$, quoziente di $\mathbb{R}$ modulo la relazione di equivalenza (generata da) $x \sim y$ se e solo se $x, y \in \mathbb{Z}$, dotato della topologia τ quoziente (della topologia reale usuale).

(a) Descrivere gli aperti di τ, e il filtro degli intorni per ogni punto di X.
(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?
(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(e) Si consideri su $\mathbb{R}$ la topologia σ indotta da τ tramite la mappa quoziente; confrontare σ con la topologia reale usuale e dire quali proprietà di separazione sono verificate per σ.

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g, trovarne una base ortogonale e determinare la segnatura di g.

(b) Trovare una base di vettori isotropi contenente i due vettori isotropi della base canonica, e scrivere la matrice di g in tale base.

(c) Descrivere tutte le (matrici delle) isometrie per g che hanno come autovettori i primi due vettori della base canonica.

Esercizio 2. Si considerino in un piano proiettivo tre triangoli prospettivi Δ_i, di vertici A_i, B_i, C_i, per $i = 1, 2, 3$ (lati a_i, b_i, c_i come usuale) con punto di prospettività comune O. Siano r_{ij} le rette di omologia di Δ_i e Δ_j (per $i \neq j$).

(a) Mostrare che le rette r_{12} ed r_{13} coincidono se e solo se

$$(O\ A_1\ A_2\ A_3) = (O\ B_1\ B_2\ B_3) = (O\ C_1\ C_2\ C_3)$$

e in tal caso coincidono con la retta r_{23}.

(b) In generale, mostare che le tre rette r_{ij} appartengono ad un fascio. Che cosa si può dire, di più, se vale solo una delle uguaglianze del punto precedente?

(c) Dualizzare la costruzione e gli enunciati precedenti.

Ci si aspettava una soluzione con conti espliciti, usando un riferimento con i punti fondamentali nel primo triangolo e il punto unità nel punto di prospettività; qualche ragionamento per permutazioni permetteva di evitare i conti più pesanti (comunque non impossibili).

Suggerimenti per una soluzione senza conti: per il primo punto, usare il teorema di Pappo (ultima parte) per mostrare che i lati a_1, a_2, a_3 sono concorrenti in un punto (idem per i b_i e i c_i, e la retta per quei tre punti passa per O); per il secondo punto conviene considerare i tre triangoli di lati a_i, b_i e c_i che sono per costruzione omologici, quindi prospettivi per Desargues, e le rette che uniscono vertici corrispondenti sono esattamente le tre rette di omologia dei triangoli di partenza. Una uguaglianza del primo punto fa degenerare uno dei triangoli, che diventa il punto di intersezione delle tre rette.

Esercizio 1. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha come punti uniti (tutti e soli) quelli di due sottospazi complementari.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti e le loro relazioni con i due sottospazi di punti uniti.
(b) Determinare tutte le rette unite e tutti i piani uniti delle proiettività del punto precedente.
(c) Determinare se esistono quadriche non degeneri che sono stabili per le proiettività studiate.

Nota: si tratta di trasformazioni diagonalizzabili (con due autovalori distinti), che quindi sono diagonalizzabili in ogni sottospazio stabile (ragionare su polinomi caratteristico e minimo); quindi le rette unite hanno almeno due punti uniti, e i piani uniti almeno tre; quindi sono solo i sup di punti uniti. Vi sono quadriche non degeneri stabili solo per le involuzioni (rapporto degli autovalori uguale a -1), e questo ha una interpretazione geometrica in termini di armonia/simmetria delle quadriche.

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono tangenti alla retta $X_1+X_2 = 0$ nel punto P_0 e alla retta $X_1 - X_0 = 0$ nel punto P_2 (ove P_0, P_1, P_2 sono i punti fondamentali del riferimento dato).

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.
(b) Trovare, se esistono, riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.
(c) Per ogni retta del piano trovare l'insieme dei sui poli al variare delle coniche del fascio; quali sottinsiemi del piano si ottengono in questo modo?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino un punto P e una retta r non passante per P. Consideriamo la quadrica $\mathcal{Q}$ formata dai punti X tali che $d(X,P) = kd(X,r)$ con k reale non negativo (rapporto tra le distanze da P e da r è costante).

(a) Determinare l'equazione cartesiana in un opportuno sistema di riferimento, e classificare proiettivamente ed affinemente tali quadriche al variare del paramentro k.
(b) Per i valori di k per cui risulta una quadrica rigata, determinare le rette contenute nella quadrica e la loro relazione con r.
(c) Determinare i piani che tagliano cerchi sulla quadrica $\mathcal{Q}$; che relazione hanno con r?

Nota: la configurazione euclidea punto-retta in dimensione 3 *ha come invariante la distanza, quindi il problema dipende da due parametri (questa distanza, ed il k del problema).*

Esercizio 1. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha solo due punti uniti (distinti).

(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti e le loro relazioni con i due punti uniti.

(b) Determinare tutte le rette unite e tutti i piani uniti delle proiettività del punto precedente.

(c) Per ogni retta unita si consideri un punto P unito, un punto Q non unito e si calcoli il birapporto $(P\ Q\ \phi(Q)\ \phi^2(Q))$. La quaterna può essere armonica in qualche ordine?

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono tangenti alla retta $X_1+X_2 = 0$ nel punto P_0 e passano per i punti P_1 e P_2 (ove P_0, P_1, P_2 sono i punti fondamentali del riferimento dato).

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(b) Trovare, se esistono, riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.

(c) Per ogni retta del piano trovare l'insieme dei suoi poli al variare delle coniche del fascio; quali sottinsiemi del piano si ottengono in questo modo?

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_3 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + 2X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(s,t) = \begin{pmatrix} t \\ t\cos(s) \\ s \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^2/\!\sim$, quoziente di $\mathbb{R}^2$ modulo la relazione di equivalenza (generata da) $x \sim y$ se e solo se sono diversi dall'origine e la retta per x e y passa per l'origine, dotato della topologia τ quoziente (della topologia reale usuale).

(a) Descrivere gli aperti di τ, e il filtro degli intorni per ogni punto di X.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Si mostri che l'insieme X è in biiezione insiemistica con l'insieme $Y = \mathbb{S}^1 \cup \{0\}$ (dove $\mathbb{S}^1$ è la circonferenza unitaria, e 0 l'origine del piano $\mathbb{R}^2$) e si confronti la topologia τ di X con la topologia σ indotta dal piano su Y.

Esercizio 1. Sia $\gamma(s)$ una curva unitaria sulla sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ (κ e τ curvatura e torsione).

(a) Usando il sistema mobile ortonormale $\gamma, \gamma', \gamma \times \gamma'$ e l'invariante $J = \det(\gamma\, \gamma'\, \gamma'')$ mostrare che $\gamma'' = -\gamma + J(\gamma \times \gamma')$. Esprimere anche γ''' nel sistema detto e calcolare κ e τ in funzione di J.

(b) Definiamo ora la curva λ come una primitiva di γ. Determinare sistema di Frénet, curvatura κ_λ e torsione τ_λ di λ. In quali casi λ è un'elica o una curva piana?

(c) È vero o falso che ogni curva unitaria (nello spazio) di curvatura costante è una primitiva di una curva sferica? Nel caso, come si costruisce tale curva sferica, e quanto valgono curvatura e torsione?

Nota: la terza domanda com'è formulata è banale (non serve neppure l'ipotesi di curvatura costante) e doveva essere: È vero o falso che ogni curva unitaria (nello spazio) di curvatura costante è una primitiva di una curva sferica unitaria? Nel caso, come si costruisce tale curva sferica, e quanto valgono curvatura e torsione?

Moralmente si tratta di caratterizzare le curve unitarie a curvatura costante nello spazio. Quando si usa una primitiva di una curva data, il risultato dipende dalla parametrizzazione scelta, cioè non è invariante (come curva) per riparametrizzazioni, e quindi si deve scegliere una parametrizzazione canonica (quella d'arco) per dare senso alla definizione.

Esercizio 2. Si consideri la superficie σ formata dalla unione delle rette normali (principali) dell'elica cilindrica $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \theta \end{pmatrix}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Scrivere una parametrizzazione di σ usando come parametri u e θ.

(a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(c) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(d) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

(e) Ridurre il sistema del punto precedente ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine. A quali limitazioni su u e θ sono soggette le linee geodetiche?

Esercizio 1. Sull'insieme $X = [0,1]^{\mathbb{R}}$ delle funzioni reali a valori in $[0,1]$ (dove $[0,1]$ è dotato della topologia euclidea usuale) consideriamo la topologia prodotto τ e la box-topology β (generata dai prodotti indiciati su $\mathbb{R}$ di aperti di $[0,1]$).

(a) Descrivere gli intorni della funzione identicamente nulla per τ e per β; quali successioni convergono alla funzione nulla per τ e per β?

(b) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni quasi ovunque nulle (nulle tranne che per un numero finito di valori).

(c) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni che si annullano sui razionali.

(d) Si determini se le funzioni di X in sè che mandano f nella funzione $f \circ \chi_{\mathbb{Q}}$ (risp. $\chi_{\mathbb{Q}} \circ f$) sono continue per τ e per β (usando la stessa topologia in dominio e codominio).

(e) Si determini se la funzione di X in sè che manda f nella funzione $\tilde{f}$, dove $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \neq 0$ e $\tilde{f}(0)$ è l'estremo superiore dei valori di f, è continua per τ e per β (usando la stessa topologia in dominio e codominio).

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^2$ dotato della massima topologia τ che rende continue tutte le inclusioni delle rette $v_q = \{q\} \times \mathbb{R}$ con $q \in \mathbb{Q}$ (rette verticali con ascissa razionale, dotate della usuale topologia).

(a) Descrivere aperti e chiusi della topologia τ. Descrivere le topologie indotte sulle rette verticali e orizzontali.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ? Quali sono i sottinsiemi connessi per τ?

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Siano date due rette distinte r, s in un piano proiettivo (sul campo K), sia O il loro punto di intersezione, e due punti diversi da O su ciascuna, siano $A, X \in r$ e $B, Y \in s$.

(a) Siano $X' \in r$ e $Y' \in s$ tali che $(O\ A\ X\ X') = -1 = (O\ B\ Y\ Y')$. Mostrare che le rette $A \vee B$, $X \vee Y$ e $X' \vee Y'$ sono concorrenti in un punto.

(b) Se $X' \in r$ e $Y' \in s$ sono tali che le rette $A \vee B$, $X \vee Y$ e $X' \vee Y'$ sono concorrenti in un punto, cosa si può dire dei birapporti $(O\ A\ X\ X')$ e $(O\ B\ Y\ Y')$?

(c) Dualizzare la costruzione e i due punti precedenti.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo che sono tangenti alla retta $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix})$ nel punto $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ed alla retta $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix})$ nel punto $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni retta r del piano, determinare il luogo dei poli di r rispetto alle coniche del fascio.

(c) Per ogni punto P del piano, che non sia del ciclo base, determinare la retta t_P tangente in P all'unica conica del fascio passante per P. Scrivere esplicitamente la funzione $P \mapsto t_P$ e dire se si tratta di una trasformazione proiettiva.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = 3X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 + 4X_0X_2 + 2X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie ottenuta ruotando la curva $\left(\begin{smallmatrix} \cosh u \\ 0 \\ u \end{smallmatrix}\right)$ attorno all'asse delle z.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le curve su σ che formano angolo costante con le linee di curvatura.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; identificare le soluzioni evidenti del sistema, e ridurre il sistema ad una equazione ordinaria del prim'ordine.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^2$ dotato dell'ordine lessicografico: $(x, y) < (x', y')$ se $x < x'$ oppure $x = x'$ e $y < y'$. Si consideri la topologia τ avente per base gli intervalli (senza estremi) per questo ordine, cioè gli insiemi del tipo $\{(x, y) : (x_0, y_0) < (x, y) < (x_1, y_1)\}$ per $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Descrivere gli aperti di τ; descrivere la topologia indotta da τ sulle rette del piano.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Si descriva la topologia indotta da τ sul quadrato unitario $[0, 1]^2$, e in particolare la si confronti con la topologia indotta dall'ordine lessicografico sul quadrato stesso (usando come prima gli intervalli senza estremi).

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ in sè ha come punti uniti tutti e soli quelli di una retta.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e la configurazione dei sottospazi uniti, specificando le posizioni reciproche.

(b) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un iperpiano unito?

(c) Per quali punti di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un piano unito?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo tali che la polare del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia la retta $(\,0\ 1\ 0\,)$, e polare del punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia la retta $(\,0\ 0\ 1\,)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(b) Per ogni punto P del piano, determinare il luogo (nel piano duale) delle polari di P rispetto alle coniche del fascio.

(c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_2 + 2X_0X_3 - 4X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(x,t) = \begin{pmatrix} xt \\ x \\ t+\sinh x \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ dotato della topologia prodotto τ (delle topologie usuali su $\mathbb{R}$).

(a) Descrivere gli aperti di τ e una base per gli intorni della funzione nulla. La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile?

(b) Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La funzione $\phi : X \to X$ cha manda ogni $f \in X$ nella funzione $\phi(f)$ che manda $z \in [0,1]$ in $1/f(z)$ se $f(z) \neq 0$ e in 0 altrimenti, è continua? La funzione $X \to \mathbb{R}$ che manda $f \in X$ nell'inf dei suoi valori assoluti è continua (usando su $\mathbb{R}$ la topologia usuale)?

Esercizio 1. Siano dati due triangoli prospettivi Δ, Δ' (di vertici A_1, A_2, A_3 e A'_1, A'_2, A'_3) in un piano proiettivo (sul campo $\mathbb{C}$), sia O il loro punto di prospettività.

(*a*) Sia Δ'' il triangolo (di vertici A''_1, A''_2, A''_3) tale che $(O\ \Delta\ \Delta'\ \Delta'') = -1$ (cioè $(O\ A_i\ A'_i\ A''_i) = -1$ per $i = 1, 2, 3$). Qual è la relazione tra le tre rette di omologia delle tre coppie di triangoli?

(*b*) Viceversa, dati tre triangoli prospettivi dallo stesso punto, cosa si può dire dei tre triangoli se le tre rette di omologia coincidono?

(*c*) Dualizzare la costruzione e i due punti precedenti.

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo che sono osculatrici alla conica $X_1^2 - 2X_0X_2$ nel suo punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ e passanti per $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(*a*) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(*b*) Per ogni punto P del piano, determinare il luogo (del piano duale) formato dalle polari di P rispetto alle coniche del fascio.

(*c*) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_0X_2 - 6X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(*a*) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(*b*) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(u,\theta) = \begin{pmatrix} u\cos\theta \\ u\sin\theta \\ \theta + \sinh u \end{pmatrix}$ per $u > 0$.

(*a*) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(*b*) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(*c*) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(*d*) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(*e*) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri il sottinsieme X di $\mathbb{R}^2$ formato dai punti ad ascissa razionale e ordinata irrazionale, con la topologia indotta da quella usuale del piano.

(*a*) Descrivere gli aperti di τ. La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(*b*) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate?

(*c*) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(*d*) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(*e*) La funzione $\mathbb{R} \to X$ cha manda ogni $x \in \mathbb{R}$ in (x, e) se $x \in \mathbb{Q}$ e in $(0, x)$ altrimenti è continua (usando la topologia usuale su $\mathbb{R}$)? Se no, qual è la minima topologia su $\mathbb{R}$ che rende continua tale funzione?

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ in sè ha una retta e un piano sghembi (tra loro) di punti uniti, e nessun altro punto unito.

(*a*) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e la configurazione degli iperpiani uniti, specificando la posizione con gli spazi di punti uniti.
(*b*) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un iperpiano unito?
(*c*) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un piano unito?
(*d*) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno una retta unita?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo che sono iperosculatrici alla conica $X_2^2 - 2X_0X_1$ nel suo punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$.

(*a*) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.
(*b*) Per ogni punto P del piano, determinare se possibile il punto P' centro del fascio delle polari di P rispetto alle coniche del fascio. Cosa si può dire della funzione cha manda P in P'?
(*c*) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 2X_0X_2 + 10X_1X_2$$

di $\mathbb{R}^4$.

(*a*) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(*b*) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di rotazione del profilo $\begin{pmatrix}0\\u\\\cosh u\end{pmatrix}$ attorno all'asse delle z.

(*a*) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.
(*b*) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(*c*) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?
(*d*) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.
(*e*) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri il piano $\mathbb{R}^2$ dotato della massima topologia τ che rende continue le inclusioni delle rette per l'origine con coefficiente angolare razionale.

(*a*) Descrivere gli aperti di τ; descrivere la topologia indotta da τ sulle rette del piano.
(*b*) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
(*c*) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?
(*d*) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(*e*) Trovare se possibile una funzione di $\mathbb{R}^2$ in sè che sia continua usando la topologia euclidea usuale ma non usando la topologia τ, e una che sia continua per τ e non per la topologia euclidea usuale (usando la stessa topologia in dominio e codominio).

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^5$ di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ associata alla forma g, trovarne una base ortogonale, determinare rango e segnatura di g.

(b) Trovare due sottospazi complementari di V isotropi per g, e scrivere la matrice di g in una base formata dalla unione delle basi dei due sottospazi trovati.

(c) Descrivere tutte le (matrici delle) isometrie per g che mandano in sè i vettori e_0, e_2, e_4 della base canonica.

Forma degenere, di rango 4 *e segnatura* $(2, 2)$*. Per l'ultimo punto: anche un vettore generatore del nucleo deve essere un autovettore. (E il determinante dell'isometria non è necessariaemnte* ± 1*, essendo la forma degenere...)*

Esercizio 2. Si considerino in un piano proiettivo due triangoli prospettivi Δ, Δ', di vertici A, B, C e $A'B'C'$ (lati a, b, c e a', b', c' come usuale) con punto di prospettività O e retta di omologia r.

(a) Variando la scelta dei sei punti per formare due triangoli, mostrare che vi sono quattro coppie di triangoli prospettivi dal punto O, e determinare le quattro rette di omologia corrispondenti e le loro relazioni reciproche.

(b) Dualizzare il punto precedente: variando la scelta dei sei lati, mostrare che vi sono quattro coppie di triangoli omologici dalla retta r, e determinare le relazioni reciproche dei quattro punti di prospettività corrispondenti.

(c) Poniamo $A'' = (O \vee A) \wedge r$, $B'' = (O \vee B) \wedge r$, $C'' = (O \vee C) \wedge r$. Verificare che

$$(O\ A\ A'\ A'') = (O\ B\ B'\ B'') = (O\ C\ C'\ C'')\ .$$

Mostrare che le quattro rette del punto (a) coincidono se e solo se i quattro punti del punto (b) coincidono se e solo e le quaterne precedenti di punti sono armoniche in qualche ordine (quale?).

Le quattro coppie di triangoli sono $(ABC, A'B'C')$*,* $(ABC', A'B'C)$*,* $(AB'C, A'BC')$*,* $(A'BC, AB'C')$*. Le quattro rette di omologia sono o in posizione generale o coincidenti. Per il terzo punto: le quaterne sono proiettate una sull'altra da opportuni fasci di rette; la coincidenza delle rette di omologia capita quando* O *ed* r *separano armonicamente le coppie* A, A'*,* B, B' *e* C, C' *(farsi un disegno con* O *punto all'infinito).*

Nota: la condizione del punto (c) *si presenta se e solo se i sei punti vertici dei due triangoli stanno su una conica.*

Esercizio 1. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha come punti uniti (tutti e soli) due punti distinti.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione dei sottospazi uniti.

(b) Mostrare che il fascio di iperpiani generato dai due iperpiani uniti è unito, e determinare il birapporto tra i due iperpiani uniti, un (altro) iperpiano di quel fascio e la sua immagine.

(c) Determinare se esistono quadriche non degeneri che sono stabili per le proiettività studiate.

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono tangenti nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alle rette di coordinate pluckeriane $\begin{pmatrix} 1 & \mp 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(b) Determinare i punti del piano che hanno polare costante per tutte le coniche del fascio. Trovare, se esistono, tutti i riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.

(c) Per ogni retta del piano, determinare quante coniche non degeneri di $\mathcal{F}$ sono tangenti a tale retta.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino due rette r, s sghembe e ortogonali tra loro, sia d la loro distanza. Consideriamo la quadrica $\mathcal{Q}$ formata dai punti X tali che $d(X, r) = d(X, s)$ (equidistanti dalle due rette).

(a) Determinare l'equazione cartesiana in un opportuno sistema di riferimento, e classificare proiettivamente ed affinemente tali quadriche al variare del paramentro d. *[Sugg.: usare come r l'asse delle x, e l'asse delle z come retta di minima distanza.]*

(b) Determinare le rette contenute nella quadrica e la loro relazione con r ed s.

(c) Mostrare che tutte le quadriche ottenute al variare del parametro d hanno in comune due rette (trovarle) e sono tali che r è polare di s (e viceversa). Queste condizioni determinano l'insieme di quadriche del problema? Descrivere l'insieme di quadriche determinato da queste condizioni come sottinsieme dello spazio proiettivo delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

La terza domanda non è ben posta: il suggerimento del primo punto porta a una matrice dipendente dal parametro d, ma bisogna pensare che la retta r e la retta di minima distanza siano fissate, altrimenti il problema dipende da molti più parametri (per specificare la posizione della retta r e della direzione di minima distanza, appunto).

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(K)$ ha come punti uniti tutti e soli tre punti distinti e non allineati.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti e le loro relazioni con i punti uniti.

(b) Determinare tutte le rette unite e tutti i piani uniti delle proiettività del punto precedente.

(c) Determinare i punti P tali che la quaterna $P, \phi P, \phi^2 P, \phi^3 P$ è allineata, e per tali quaterne determinare il birapporto.

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che passano per i punti $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ e tali che polare del punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ sia la retta $\left(\begin{smallmatrix}1 & -1 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(b) Trovare quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio, e determinare, se esistono, tutti i riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.

(c) Descrivere l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio in quanto sottinsieme dello spazio proiettivo delle coniche del piano duale.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + 2X_0X_2 + 3X_1^2 - 2X_1X_3 + 2X_2^2 + 3X_3^2$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette eventualmente complesse contenute in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Sia data la superficie di rotazione attorno all'asse z del profilo $xz = \sin(x)$.

(a) Si trovino una parametrizzazione e una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^n$, dotato della minima topologia τ che rende continua la mappa verso $\mathbb{R}$ (con topologia usuale) che ad ogni vettore $v \in X$ associa il suo modulo (euclideo usuale) $\|v\|$.

(a) Descrivere gli aperti di τ, e il filtro degli intorni per ogni punto di X.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Nel caso $n = 1$, la topologia τ coincide con quella usuale?

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow Rig(\mathbb{R}^n)$ una mappa differenziabile di gruppi dal gruppo additivo $\mathbb{R}$ al gruppo (per composizione) delle rigidità euclidee di $\mathbb{R}^n$, cioè $\phi(0) = \mathrm{id}$ e $\phi(t+s) = \phi(t) \circ \phi(s)$. La mappa ϕ e la sua immagine si dicono un sottogruppo 1-parametrico delle rigidità.

(a) Mostrare che l'immagine di ϕ è un sottogruppo commutativo di $Rig(\mathbb{R}^n)$, che $\phi'(t) = \phi(t) \circ \phi'(0) = \phi'(0) \circ \phi(t)$ e dedurre che $\phi^{(i)}(t) = \phi(t) \circ \phi'(0)^i$.

(b) Consideriamo ora un punto P_0 e definiamo la curva $\gamma(t)$ come la traiettoria di P_0 sotto l'azione del gruppo $\phi(t)$, cioè $\gamma(t) := \phi(t)(P_0)$. Mostrare che $\gamma^{(i)}(t) = \phi(t)\gamma^{(i)}(0)$. Dedurre che tutte le curvature di γ sono costanti. *[sugg.: cosa si può dire del riferimento di Frénet di γ?]*

(c) Viceversa, consideriamo una curva $\gamma(t)$ in $\mathbb{R}^n$ le cui curvature siano tutte costanti; mostrare che γ può essere descritta come nella costruzione precedente, cioè che γ è la traiettoria di un punto sotto l'azione di un sottogruppo 1-parametrico delle rigidità. *[sugg.: definire $\phi(t)$ nel modo ovvio a partire da $\gamma(t)$, poi mostrare che si tratta di un sottogruppo 1-dimensionale.]*

(d) Usare i punti precedenti e la struttura delle rigidità di $\mathbb{R}^n$ *[sugg.: forme canoniche con blocchi diagonali per $SO_n(\mathbb{R})$, e traslazioni nulle per i blocchi con autovalori $\neq 1$]* per dare delle forme canoniche semplici per le curve a curvature costanti non nulle per $n = 2, 3, 4, 5$.

Esercizio 2. Si consideri la superficie ottenuta ruotando la curva $\gamma(u) = \begin{pmatrix} 1/\cosh(u) \\ 0 \\ u - \tanh(u) \end{pmatrix}$ per $u > 0$ attorno all'asse verticale. Scrivere una parametrizzazione σ usando come parametri u e θ.

(a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(c) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(d) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

(e) Descrivere le limitazioni a cui sono soggette le geodetiche, e in particolare determinare la minima distanza dall'asse di rotazione e la massima altezza che possono essere raggiunta da una geodetica.

Esercizio 1. Sull'insieme $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni reali a valori reali (dove $\mathbb{R}$ è dotato della topologia euclidea usuale) consideriamo la topologia prodotto τ e la box-topology β (generata dai prodotti indiciati su $\mathbb{R}$ di aperti di $\mathbb{R}$).

(a) Descrivere gli intorni della funzione identica per τ e per β; quali successioni convergono alla funzione identica per τ e per β?

(b) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ (mappe da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}$).

(c) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$ (mappe da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Q}$).

(d) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni che non assumono mai il valore 0.

(e) Si determini se la funzione di X in sè che manda f nella funzione $\tilde{f}$, dove $\tilde{f}(x) = \max\{|f(n)| : n \in \mathbb{Z}, |n| \leq |x|\}$ è continua per τ e per β (usando la stessa topologia in dominio e codominio).

($e*$) Si determini se la funzione di X in sè che manda f nella funzione $\tilde{f}$, dove $\tilde{f}(x) = \inf\{|f(y)| : y \leq x\}$ è continua per τ e per β (usando la stessa topologia in dominio e codominio).

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^n$, dotato della minima topologia τ che rende continua la mappa $X \to \mathbb{R}$ (ove $\mathbb{R}$ è dotato della topologia usuale) che ad ogni vettore $v \in X$ associa il suo modulo (euclideo usuale) $\|v\|$.

(a) Descrivere gli aperti di τ, e il filtro degli intorni per ogni punto di X. Confrontare τ con la topologia usuale di $\mathbb{R}^n$.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Le trasformazioni affini di $\mathbb{R}^n$ in sè sono continue per la topologia τ? Eventualmente, quali di queste trasformazioni sono continue?

Esercizio 1. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha come punti uniti tutti e soli quelli di un piano e un punto esterno a quel piano.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti e le loro relazioni con gli spazi di punti uniti.

(b) Per le proiettività del punto precedente, determinare per quali punti dello spazio passa almeno una retta unita, e per quali punti passa almeno un piano unito.

(c) Per ogni retta unita si consideri un punto P unito, un punto Q non unito e si calcoli il birapporto $(P\ Q\ \phi(Q)\ \phi^2(Q))$. La quaterna può essere armonica in qualche ordine?

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono osculatrici alla conica $X_1^2 + X_2^2 = X_0^2$ nel suo punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e passanti per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(b) Trovare quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio, e determinare, se esistono, tutti i riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.

(c) Si consideri l'insieme $\mathcal{F}^*$ delle coniche duali delle coniche (non degeneri) del fascio dato. Si determini se è un fascio, e se vi sono punti comuni o tangenti comuni a tutte le coniche di $\mathcal{F}^*$.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = -X_0^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_3 + 2X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - X_3^2$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette eventualmente complesse contenute in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Sia data la superficie di rotazione del profilo $xz = \sin(x)$ attorno all'asse delle z.

(a) Si trovino una parametrizzazione e una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee su σ che formano angolo costante con tutti i profili.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

Esercizio 2. Si consideri $[0,1]^2$ dotato dell'ordine lessicografico ($(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ se $x_0 < x_1$ oppure $x_0 = x_1$ e $y_0 < y_1$) e della topologia τ generata dagli intervalli del tipo $\{(x, y) : (x_0, y_0) < (x, y) < (x_1, y_1)\}$ al variare di (x_0, y_0) e (x_1, y_1) in $[0,1]^2$.

(a) Descrivere gli intorni e la chiusura di ogni punto per la topologia τ. Descrivere le topologie indotte sui segmenti verticali e orizzontali.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? A quali proprietà di separazione soddisfa τ?

(c) Quali sono le proprietà di connessione di τ? Quali sono i sottinsiemi connessi per τ?

(d) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

Esercizio 1. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha come punti uniti tutti e soli quelli di due rette sghembe.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti e le loro relazioni con le rette di punti uniti.

(b) Per le proiettività del punto precedente, determinare per quali punti dello spazio passa almeno un piano unito, e per quali punti passa almeno una retta unita.

(c) Per ogni retta unita si consideri un punto P non unito e si calcoli il birapporto $(P\ \phi(P)\ \phi^2(P)\ \phi^3(P))$. La quaterna può essere armonica in qualche ordine?

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono tangenti alla conica $X_1^2 + X_2^2 = X_0^2$ nel punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e passano per i punti $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(b) Trovare quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio, e determinare, se esistono, tutti i riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.

(c) Per ogni retta del piano trovare l'insieme dei suoi poli al variare delle coniche del fascio; quali sottinsiemi del piano si ottengono in questo modo?

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 2X_0X_3 + 2X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette eventualmente complesse contenute in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix}t+\cos\theta\\ \sin\theta\\ t\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = S^{\mathbb{Z}}$ dotato della topologia prodotto τ delle topologie su $S = \{0,1\}$ (insieme con due punti) per cui l'unico aperto non banale è $\{0\}$.

(a) Descrivere gli aperti di τ e una base per gli intorni delle funzioni costanti. La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile?

(b) Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) La funzione di X in sé che manda un elemento (s_n) in (s'_n) dove $s'_n = \begin{cases} 1 & \text{se } s_n = 0 \\ 0 & \text{se } s_n = 1 \end{cases}$ è continua?

La funzione di X in sé che manda un elemento (s_n) in (s'_n) dove $s'_n = s_{n+1}$ è continua?

Esercizio 1. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha come punti uniti tutti e solo quelli di una retta e tre punti esterni a quella retta.

(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti e le loro relazioni con i punti uniti.

(b) Determinare tutte le rette unite e tutti i piani uniti delle proiettività del punto precedente.

(c) Per ogni retta unita si considerino due punti Q_1 e Q_2 non uniti e si calcoli il birapporto $(Q_1\ Q_2\ \phi(Q_1)\ \phi(Q_2))$. La quaterna può essere armonica in qualche ordine?

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono iperosculatrici alla conica $X_0^2 = X_1X_2$ nel suo punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.

(b) Trovare quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio, e determinare, se esistono, tutti i riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.

(c) Determinare l'insieme delle coniche duali delle coniche non degeneri del fascio $\mathcal{F}$, dandone delle equazioni cartesiane in quanto sottinsieme dello spazio delle coniche del piano duale.

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = 2X_0^2 + X_2^2 - 2X_0X_2 - 4X_1X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette eventualmente complesse contenute in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Sia data la superficie di rotazione ottenuta ruotando il profilo $z = 1/x$ attorno all'asse z.

(a) Trovare una parametrizzazione ed una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ? Quali sono le isometrie di σ in sè?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee che formano angolo costante con le linee di curvatura.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; quali geodetiche possono assumere valori arbitrariamente alti di z?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^2$ (piano reale usuale), e l'insieme $\mathcal{C}$ dei suoi sottinsiemi dati dagli zeri di insiemi di polinomi in due variabili.

(a) Mostrare che l'insieme $\mathcal{C}$ è l'insieme dei chiusi per una topologia τ (detta di Zariski). La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile?

(b) Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Quali sono le funzioni continue di X in $\mathbb{R}$ (quest'ultimo dotato della topologia usuale)?

Esercizio 1. Una proiettività di $\mathbb{P}^4(K)$ ha come punti uniti esattamente quelli di un piano.
(a) Determinare le possibili forme di Jordan e discutere la configurazione degli iperpiani uniti e le loro relazioni con il piano di punti uniti.
(b) Determinare tutte le rette unite e tutti i piani uniti delle proiettività del punto precedente.
(c) Per ogni retta unita si considerino due punti distinti non uniti P, Q e si calcoli il birapporto $(P\ \phi(P)\ Q\ \phi(Q))$. La quaterna può essere armonica in qualche ordine?

Esercizio 2. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche del piano proiettivo che sono bitangenti alla conica $X_0X_2 = X_1^2$ nei punti di intersezione con la retta $X_1 = 0$.
(a) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base del fascio.
(b) Trovare quali punti del piano hanno polare costante per tutte le coniche del fascio, e determinare, se esistono, tutti i riferimenti proiettivi in cui tutte le coniche del fascio sono diagonalizzate.
(c) Per ogni retta del piano trovare l'insieme dei suoi poli al variare delle coniche del fascio; quali sottinsiemi del piano si ottengono in questo modo?

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 + 2X_0X_1 - 2X_0X_3 + 2X_1X_2 - 2X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.
(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
(b) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette eventualmente complesse contenute in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 1. Sia data la superficie di rotazione ottenuta ruotando il profilo $z^2 = x$ attorno all'asse z.
(a) Trovare una parametrizzazione ed una equazione cartesiana per σ.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ? Quali sono le isometrie di σ in sè?
(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee che formano angolo costante con le linee di curvatura.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; quali geodetiche possono assumere valori arbitrariamente alti di z?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^2$ (piano reale usuale), dotato della massima topologia τ che rende continue le inclusioni di tutte le rette nel piano (ogni retta essendo dotata della topologia usuale).
(a) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile?
(b) Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?
(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?
(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?
(e) Vi sono funzioni continue di X in $\mathbb{R}$ (quest'ultimo dotato della topologia usuale) che non siano continue usando la topologia euclidea usuale di $\mathbb{R}^2$?

UNIVERSITAS STUDII PADUANI
MCCXXII