Geo1B - Tutorato 10

Esercizio 1

Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(K)$ e siano dati 3 triangoli ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ prospettivi con uno stesso centro di prospettività P (cioè tali che i 4 punti P, A, A', A'' siano allineati e che lo stesso valga per P, B, B', B'' e P, C, C', C'').

(a) Si dimostri che le 3 rette di omologia tra i triangoli concorrono in un punto.

(b) Si trovi una condizione sui 3 triangoli che sia equivalente al fatto che le 3 rette di omologia coincidano. *[sugg.: si guardino i birapporti lungo le tre rette di prospettività.]*

Svolgimento.
Verrà forse più avanti. $\square$

Esercizio 2 (primo appello Geometria 2 parte A - 11 dicembre 2009)

Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(K)$ e si supponga di aver fissato un sistema di riferimento proiettivo. Si prendano le rette

$$r := \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad , \quad s := \begin{cases} x_o = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

e si consideri la funzione

$$\begin{array}{cccc} \phi : & r & \longrightarrow & s \\ & \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(a) Mostrare che ϕ è una proiettività.

(b) Determinare l'equazione del luogo $\mathcal{Q}$ dato dall'unione delle rette $P \vee \phi(P)$ al variare di P sulla retta r.

Svolgimento.

(a) Sia $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ la base vettoriale associata al sistema di riferimento che si è fissato. Allora $r = \langle v_0, v_1\rangle$, $s = \langle v_2, v_3\rangle$. e l'azione della funzione ϕ si può riscrivere in questo modo

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{P}(\langle v_0, v_1\rangle) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\langle v_2, v_3\rangle) \\ & \langle x_0v_0 + x_1v_1\rangle & \mapsto & \langle (x_0 + x_1)v_2 + (x_0 - x_1)v_3\rangle \end{array}.$$

Allora ci si accorge facilmente che definita la funzione lineare

$$\begin{array}{rccc} f : & \langle v_0, v_1\rangle & \longrightarrow & \langle v_2, v_3\rangle \\ & x_0v_0 + x_1v_1 & \mapsto & x_0(v_2 + v_3) + x_1(v_2 - v_3) \end{array},$$

essa induce ϕ tra le due rette proiettive, e che quindi ϕ è di fatto una applicazione proiettiva. È inoltre facile vedere che f è un isomorfismo di spazi vettoriali. Quindi ϕ è effettivamente una proiettività.

(b) Si può trovare l'equazione con la seguente successione di bi-implicazioni:

$$\begin{aligned} P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q} \quad & \Leftrightarrow \exists (x_0, x_1) \neq (0,0) : \exists \lambda, \mu \text{ per cui } \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \exists (x_0, x_1) \neq (0,0) : \exists \lambda, \mu \text{ per cui } \begin{cases} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ultima condizione individuata si può riscrivere sfruttando l'equivalenza tra annullamento del determinante e lineare dipendenza di vettori. Si ottiene in questo modo che

$$P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q} \quad \Leftrightarrow \exists (x_0, x_1) \neq (0,0) : \begin{cases} \begin{vmatrix} p_0 & x_0 \\ p_1 & x_1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} p_2 & x_0 + x_1 \\ p_3 & x_0 - x_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

che è riscrivibile, con due passaggi di numero, come

$$P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q} \quad \Leftrightarrow \exists (x_0, x_1) \neq (0,0) : x_0 \begin{pmatrix} -p_1 \\ p_2 - p_3 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} p_0 \\ -p_2 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

A sua volta, l'ultima condizione trovata esprime niente meno che la lineare dipendenza di due vettori. Per cui si può usare di nuovo la teoria dei determinanti per scrivere la condizione equivalente

$$P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q} \quad \Leftrightarrow p_1(p_2 + p_3) - p_0(p_2 - p_3) = 0 \ .$$

Questa è l'equazione cercata e l'esercizio è concluso.

$\square$

Esercizio 3 (terzo appello Geometria 2 parte A - 13 luglio 2010)

> Siano dati un piano π e una retta r tra loro sghembi in $\mathbb{P}^4(K)$.
>
> (a) Mostrare che per ogni punto P non appartenente né a r né a π, esiste un'unica retta p passante per P e incidente sia con r che con π.
>
> (b) Dualizzare l'enunciato del punto (a).

Svolgimento. Verrà forse più avanti. $\square$