Geo1B 31/05/2023

Note Title

Proiettività $\varphi: \mathbb{P}^n(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$ $\qquad \tilde{\varphi}: K^{n+1} \xrightarrow{\sim} K^{n+1}$ lineare surgettiva ~~isomorfismo~~ auto

Fissato un s.d. rif in $\mathbb{P}^n(K)$ ($n+2$ pti)

$\mathcal{R}: \{ \underset{\langle v_0 \rangle}{P_0}, \underset{\langle v_1 \rangle}{P_1}, \dots \underset{\langle v_n \rangle}{P_n}, \underset{\langle \sum v_i \rangle}{P_{n+1}} \}$ $\qquad v_0 \dots v_n$ base di K^{n+1} $\mathcal{V}$

$\tilde{\varphi} \rightsquigarrow \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\tilde{\varphi}) = A \in GL_{n+1}(K)$

NB $\tilde{\varphi}$ non è unica $\tilde{\varphi}$ e $\lambda\tilde{\varphi}$, $\lambda \in K^*$ danno la stessa φ

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\lambda\tilde{\varphi}) = \lambda A$

La matrice associata a φ (fissato $\mathcal{R}$) $\quad [A] \in GL_{n+1}(K)/K^*$
non è unica ma è determinata a meno di $\lambda \in K^*$

Proprietà: sia $\underset{\langle w \rangle}{P} \in \mathbb{P}^n(K)$ di coord. $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ risp al s.d.r $\mathcal{R}$

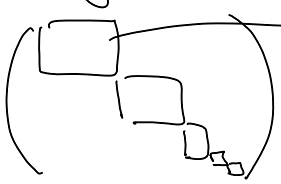
$w = \sum_{i=0}^{n} x_i v_i$

Se A è una matrice associata a φ (o a $\tilde{\varphi}$) risp. a $\mathcal{R}$
vuol dire che se P ha coord x nel s.d.r. $\mathcal{R}$
$\varphi(P)$ ha coord. Ax nel s.d.r. $\mathcal{R}$.

$K = \overline{K}$ d'ora in poi (algebricamente chiuso)

$\Rightarrow$ La matrice di φ è jordanizzabile

In un s.d.r. opportuno



blocchi di Jordan $J_m(\alpha)$
α autovalore per $\tilde{\varphi}$, A
$\neq 0$ sicuramente perché A invertibile

Per studiare A devo conoscere autovalori e relativi autovettori di A
$v \in K^{n+1}$ è autovettore di $\tilde{\varphi}$ (o di A)
se $Av = \overset{\neq 0}{\alpha} v$

$\underset{\mathbb{P}^n(K)}{P} = \langle v \rangle$ $\qquad \varphi(P) = P$ $\qquad$ corrisponde a un <u>pto unito</u>.
(e viceversa)

rette unite: ? $\varphi(r) = r$ $r = P \vee Q$, $P \in \langle v \rangle$, $Q \in \langle w \rangle$, $r = \langle v, w \rangle$ v, w l. ind.

$\tilde{\varphi}(\langle v, w \rangle) = \langle v, w \rangle$ ossia $\langle v, w \rangle$ è $\tilde{\varphi}$-stabile.

e così via in dimensione maggiore.

iperpiani uniti $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$ eq. $(a_0, \dots, a_n)$ coord plückeriane dell'ip. nel s.d.r. $\mathcal{R}$.

è unito se $(a_0 \dots a_n) A = \alpha (a_0, \dots a_n)$

A matrice di φ

$$\Updownarrow$$

$$A^t \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Per determinare iperpiani uniti $\rightsquigarrow$ autovettori di A^t

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è autovettore di A

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A^t

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è autovettore di A^t

A e A^t hanno gli stessi autovalori e blocchi di J (sono simili) ma non hanno gli stessi autovettori

φ è proiettività di $\mathbb{P}^1$ $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è punto unito

$x_1 = 0$ "l'iperpiano" unito ossia l'iperpiano di coordinate pl. $(0, 1)$.

Da ricordare: •) se P, Q sono 2 p.ti uniti di φ con lo stesso autovalore $\Rightarrow$ $P \vee Q$ è retta di p.ti uniti

•) se P, Q sono 2 punti uniti di φ con autov. diversi $\Rightarrow$ $P \vee Q$ è unita

Studiamo le proiettività di $\mathbb{P}^2(K)$ $K = \overline{K}$

Dobbiamo scrivere le possibili forme di Jordan di matrici $A \in GL_3(K)$ $\deg p_A(x) = 3$

1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \mathbb{1}_3$ $\tilde{\varphi} \rightsquigarrow \varphi = id_{\mathbb{P}^2}$ $\alpha \neq 0$

tutto è unito.

2) $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & \\ & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$ simile a $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})^2 = K^3 \qquad m_A(x) = (x-\lambda)^2$

$\cup$

$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) = 2 \qquad P_A(x) = (x-\lambda)^3$

tutti i punti di $\mathbb{P}^2$ che provengono da $\underbrace{\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})}_{\text{retta in } \mathbb{P}^2}$ sono uniti

C'è una retta di punti uniti. $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Osservo inoltre che anche $P_0 \vee P_1$ è una retta unita con solo P_0 unito

Ma più in generale tutte le rette per P_0 sono unite

φ è una omologia speciale.

lo posso vedere per dualità

Ho visto che c'è retta di punti uniti $\rightsquigarrow$ R unito pto per cui passano rette unite.

r di punti uniti

se ho dubbi controllo: una retta per P_0 è del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle \ni \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta a \\ \beta b \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta a \\ \beta b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha + \beta a \\ \lambda \beta a \\ \lambda \beta b \end{pmatrix} = \underbrace{(\lambda\alpha + \beta a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\beta \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}}_{\in \text{ sottospazio di partenza}}$

3) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})^3 = K^3$

$\cup$

$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) = 1$

1 solo pto unito $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

per dualità c'è retta unita $\rightsquigarrow$ autovettore di $A^t = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \lambda & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underset{P_0 \vee P_1}{x_2 = 0}$ $\left[\text{controllo se non mi fido: } A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + b \\ \lambda b \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Perché non ci sono altre rette unite? Per dualità dovrei avere altri pti uniti. Non è il caso.

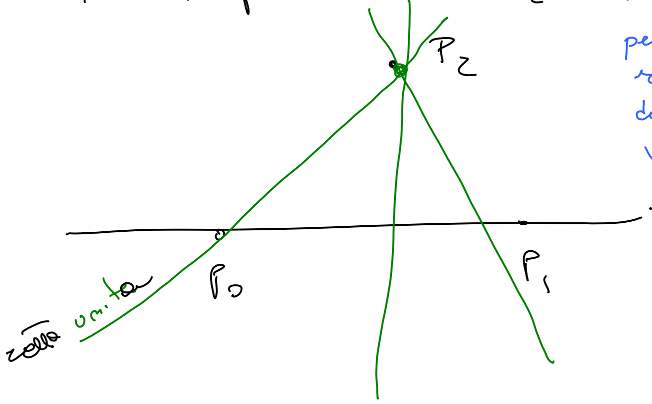
4) $A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$ $\qquad \underbrace{\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})}_{\dim 2} \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(A - \mu \mathbb{1})}_{\dim 1} = K^3$

$\mu \neq \lambda$

$\mu, \lambda \in K^*$

C'è una retta $P_0 \vee P_1$ di p.ti uniti } analogia
ho un p.to unito P_2 esterna a quella retta. } generale

per dualità esiste fascio di rette unite e una retta unita (esterna al fascio) dunque retta di punti uniti
Vedo che P_2 è il centro del fascio!



5) $\begin{pmatrix} \begin{array}{|cc|} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ 0 \quad 0 & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(A-\lambda 1)^2}_{\displaystyle \cup \atop \displaystyle \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda 1)=1} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(A-\mu 1)}_{\dim 1} = K^3$$

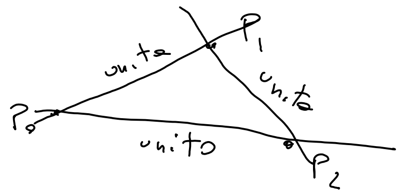
P_0 è p.to unito, P_2 è punto, $P_0 \vee P_1$ è unito, $P_0 \vee P_2$ retta unita

Non vi sono altre rette unite perché non vi sono altri p.ti uniti (dualità) | autospazio

6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$ 3 punti uniti P_0, P_1, P_2

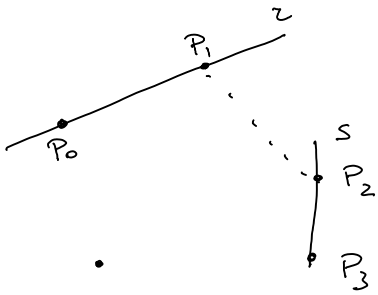
3 rette unite

$P_0 \vee P_1$, $P_0 \vee P_2$, $P_1 \vee P_2$



Esercizio 20/6/2022

Sia ϕ proiettività di $\mathbb{P}^4$ in sé.
Supponiamo che i p.ti uniti siano <u>tutti</u> e <u>soli</u> quelli di 2 rette sghembe. Determinare le possibili forme di Jordan di ϕ e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette, piani uniti.
Per ogni retta unita sia P un pto unito e sia Q un pto non unito. Determinare $(P, Q, \phi(Q), \phi^{-1}(Q))$



$\phi \rightsquigarrow A$ 5×5

$r \rightsquigarrow \lambda$ autovalore di A
$\neq$
$s \rightsquigarrow \mu$ - - - - - - -

$\lambda \neq \mu$ altrimenti avrei $P_0 \vee P_2$, $P_0 \vee P_3$, - - rette di pti uniti!

$$\underbrace{\ker(A-\lambda\mathbb{1})^{\cdots}}_{\dim \geq 2} \oplus \underbrace{\ker(A-\mu\mathbb{1})^{\cdots}}_{\dim \geq 2} \oplus \cancel{?} = K^5$$

almeno 2 blocchi di J. $\rightsquigarrow$ dim ≥ 2

dim ≥ 2 idem

non c'è altrimenti avrei un ulteriore pto unito esterno a r e s

$$p_A(x) = \underbrace{(x-\lambda)^2}\,\underbrace{(x-\mu)^3}$$

$$m_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^2$$

a meno di scambiare λ con μ unica possibilità

Forma di Jordan è una:

$$K^5 = \ker(A-\lambda\mathbb{1})^2 \oplus \ker(A-\lambda\mathbb{1})^3$$

$$\ker(A-\lambda\mathbb{1})^2 = \ker(A-\lambda\mathbb{1})$$

$$\ker(A-\lambda\mathbb{1})^3 = \ker(A-\lambda\mathbb{1})^2 \text{ dim } 3 \supset \ker(A-\lambda\mathbb{1}) \rightsquigarrow \text{dim } 2$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & & & \\ 0 & \boxed{\lambda} & & & \\ & & \boxed{\mu} & & \\ & & & \mu & 1 \\ & & & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$P_0 \vee P_1$ retta di pti uniti r

$P_2 \vee P_3$ . . . . s

non ci sono altri pti uniti.

Per dualità (o studiando A^t) determino gli iperpiani uniti (dim 3): gli iperp. uniti sono raccolti in 2 fasci di sostegno uno sp. proiettivo di dim 2

Gli iperpiani hanno coord. plückeriane $(a_0, a_1, \dots a_4) = a$ t.c.

$(a_0, a_1, \dots a_4)A = \lambda(a_0\ a_1 \dots a_4)$ (oppure μ) ossia $a^t A = \lambda a^t$

$$A^t = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \mu & & \\ & & & \mu & \\ & & & 1 & \mu \end{pmatrix}$$

traspongo e ottengo

$a^t \rightsquigarrow$
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}}\qquad \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

piano $\rightsquigarrow \pi: \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ piano $\rightsquigarrow \pi': \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

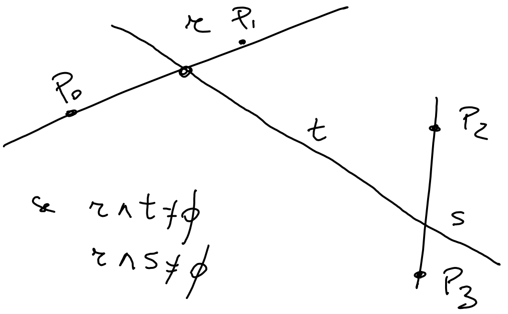
Ogni iperpiano che contiene π è unito: $a_0x_0 + a_1x_1 = 0$

. . . . π' . . . . . : $b_2x_2 + b_4x_4 = 0$

Non ce ne sono altri, altrimenti avrei ulteriori pti uniti per dualità.

Ora cerco le rette unite.

Penso
- tali rette sono contenute in iperpiani uniti
- $\underbrace{\text{tali rette non sono contenute in iperpiani uniti}}_{\text{non si presenta questo caso:}}$



se $r \wedge t \neq \phi$
$r \wedge s \neq \phi$

r, s rette di pti uniti
sia t una retta unita.
$t \neq r, s$

t unito $\leftrightsquigarrow$ sottospazio di dim 2 in K^5 che sia ϕ-stabile.
e verifico che necessariamente è contenuto in uno dei sottosp ϕ-stabili di dim 4 in K^5

In alternativa:

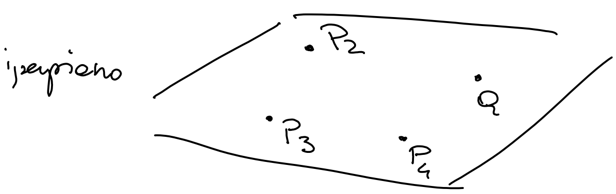
se t interseca r e s $\Longrightarrow$ $t \subseteq r \vee s$ iperp. unito

se t è sghembo con r $\Longrightarrow$ $t \vee r$ è iperpiano unito che cont. t
infatti, se $t \rightsquigarrow \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{U_t}$ $r \rightsquigarrow \underbrace{\langle w_1, w_2 \rangle}_{U_r}$ in K^5, i sottospazi U_t e U_r sono ϕ-stabili. $\Rightarrow$ $U_t + U_r$ è ϕ-stabile.

se t - - - - s $\Longrightarrow$ $t \vee s$ è unito e contiene t.

Dunque siamo ridotti a studiare le rette unite contenute negli iperpiani uniti.

<u>Due casi</u> a) t sia contenuta in un iperpiano di eq $a_0x_0 + a_1x_1 = 0$ } dim 3



$Q = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

nel s.d.r. $\{Q \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; U\}$?

$A\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

la matrice di ϕ ristretto all'iperpiano è: 4×4

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

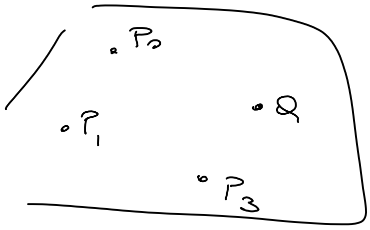
sono ridotta a studiare rette unite di proiett. in $\mathbb{P}^3$

C'è descrizione nelle dispense.

$Q \vee P_2$ unita, $P_2 \vee P_3$ retta di punti uniti, $P_3 \vee P_4$ unita
$Q \vee P_3$ " , altre rette unite? C'è omologia indotta su un sottosp proiettivo?

b) t si è contenuto in $b_2x_2+b_4x_4=0$

s.d.r. P_0, P_1, P_3, Q, U



$Q=\begin{pmatrix}0\\0\\b_4\\0\\-b_2\end{pmatrix}$

la matrice di $\phi|_{\text{iperpiano}}$ è

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix} \quad \text{è simile a} \quad \begin{pmatrix}\boxed{\lambda}&0&0&0\\0&\boxed{\lambda}&0&0\\0&0&\mu&1\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$$

se $b_2=0$ $\qquad$ $b_2\neq 0$

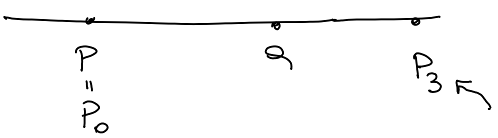
Per studiare le rette unite (esercizio, confronta le dispense).

Per dualità trovo anche la configurazione dei piani uniti.

$(P, Q, \phi(Q), \phi^{-1}(Q))$ due casi
- (1) retta contenga 2 pti uniti (ma non unita!)
- (2) ... ... 1 solo pto unito

Ad es.

(1) t:



$Q\neq P_3$

$\phi|_t$ nel s.d.r. P_0, P_3, Q $\qquad \begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$ $\qquad Q=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$(P, Q, \phi(Q), \phi^{-1}(Q)) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\lambda\\1/\mu\end{pmatrix} = -\mu/\lambda$$

(2) ...

Esercizio 26/8/2022

ϕ proiettività di $\mathbb{P}^4$. Punti uniti tutti e soli quelli di una retta r e due punti T_1, T_2 esterni ad essa.

Determinare le possibili forme di Jordan di ϕ e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette, piani uniti.