# GEO 2 A

## GEOM. PROIETTIVA

- $Ax = b \xrightarrow{\text{OMOGENEIZZAZIONE}} \left(-b \middle| A\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = 0$

  Se $x_0 = 1 \Rightarrow x$ è sol. di $Ax = b$

- **Def** SPAZIO PROIETT. COMPLETO ASSOCIATO A $V := \{W : W \leq V\}$ $\mathbb{S}(V)$

- **OSS**: $(\mathbb{S}(V), +, \cap)$ è un reticolo

- **Def** SP. PR. PUNTEGGIATO (ASSOC. A $V$) $= \mathbb{P}(V) := \left\{W : \begin{matrix} W \leq V \\ \dim W = 1 \end{matrix}\right\}$

  **OSS** $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{S}(V)$

- **Def** SOTTOSP. PROIETT. COMPLETO (o SOTTORETICOLO COMPL.) DI SOSTEGNO $W \leq V$

  $:= \mathbb{S}(W) \quad (\subset \mathbb{S}(V))$

  **Def** SOTTOSP. PROIETT. PUNTEGGIATO DI SOST. $W \leq V :=$

  $:= \mathbb{P}(W) \quad (\subset \mathbb{P}(V))$

- **Def** STELLA (PROIETTIVA) COMPLETA DI ASSE $W \leq V :=$

  $:= \mathbb{S}\left(\frac{V}{W}\right) = \{W' \in \mathbb{S}(V) \mid W \leq W'\}$

- **Def** SPAZIO PROIETTIVO $\overset{\text{PUNTEGGIATO}}{\vee}$ STANDARD (di dimens. $n$ su $K$) $= \mathbb{P}^n(K)$

  $\mathbb{P}^n(K) := \frac{K^{n+1} \setminus \{0\}}{K^\times} \quad (K^\times := K \setminus \{0\})$

- **OSS** $\alpha : \mathbb{P}(K^{n+1}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$, $\langle v \rangle \longmapsto [v]$ è una biez.

▶ **Def** "SP. PROIETT. STANDARD (di dim. $n$ su $K$)" $= \mathbb{S}^n(K) := \mathbb{S}(K^{n+1})$

▶ **OSS**: $\mathbb{P}^n(K) = \left\{ \langle \binom{x_0}{x} \rangle : \underset{x \in K^n}{x_0 \neq 0} \right\} \sqcup \left\{ \langle \binom{0}{x} \rangle : x \in K^n \right\} =$

$= \left\{ \langle \binom{1}{x} \rangle : x \in K^n \right\} \sqcup \left\{ \langle \binom{0}{x} \rangle : x \in K^n \right\} \cong \mathbb{A}^n(K) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K)$

▶ **Def** SP. PROIETTIVO (in generale) := "insieme $\mathbb{S}$ t.c.

$$\exists V, \exists \alpha_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}(V) \xrightarrow[su]{1-1} \mathbb{S}"$$

**OSS**: $\mathbb{S}$ ha struttura di reticolo indotta da $\mathbb{S}(V)$ tramite $\alpha_{\mathbb{S}}$

▶ **Def** ~~Dim~~ $\dim_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}) := \dim_K V - 1$

~~dim~~ ~~$\mathbb{S}(V)$~~ $\dim_{\mathbb{S}}(\alpha(W)) := \dim_K W - 1$

▶ **Def** $\alpha(W)$ è:

- Vuoto proiett. := "$\dim_{\mathbb{S}}(\alpha(W)) = -1$"
- PUNTO := "$\dim_{\mathbb{S}}(\alpha(W)) = 0$"
- RETTA := "$\dim_{\mathbb{S}}(\alpha(W)) = 1$"
- PIANO := "$\dim_{\mathbb{S}}(\alpha(W)) = 2$"
- IPERPIANO := "$\dim_{\mathbb{S}}(\alpha(W)) = \dim_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}) - 1$"

▶ ~~Def SP. PROIETTIVO DUALE~~

**PROP**: La dualità canonica induce il seguente antiisomorf. di reticoli:

$$\tau_V : \mathbb{S}(V) \longrightarrow \mathbb{S}(V^*)$$
$$W \longmapsto W^\perp$$

**OSS** $\forall W \in \mathbb{S}(V)$, $\tau_V$ induce antiisomorf. tra $\mathbb{S}(\frac{V}{W})$ e $\mathbb{S}(W^\perp) \cong \mathbb{S}((\frac{V}{W})^*)$

CIOÈ $\tau_V$ scambia sottospazi di $\mathbb{S}(V^*)$ con stelle di $\mathbb{S}(V)$ e viceversa

~~DIM: bisogna mostrare che $\tau_V$ è una biez. insiemistica, che scambia inf e sup~~ DIM: ⇓



**DIM**: bisogna mostrare che $\tau_V$ è una biez. insiemistica, che scambia inf e sup e rovescia le inclusioni. Tutto ciò è ovvio (da Geo 1) dalle proprietà della dualità standard

▶ **Def** SP. PROIETT. DUALE (di $(\mathbb{S}, V, \alpha_{\mathbb{S}})$) :=

$$:= (\mathbb{S}, V^*, \alpha^*_{\mathbb{S}}) \quad \text{con } \alpha^*_{\mathbb{S}} := \alpha_{\mathbb{S}} \circ \tau_{V^*} = \alpha_{\mathbb{S}} \circ \tau_V^{-1}$$

(indicati anche come $\mathbb{S}^*$ e basta)

▶ **Def** VARIETÀ LINEARE PROIETTIVA $L \subset \mathbb{P}$ (sp. pr. generale punteggiato, con $\alpha : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}$)

$$:= L = \alpha(\mathbb{P}(W)) \quad \exists W \in \mathbb{S}(V)$$

**OSS** $L \subset \mathbb{P}$ è var. lin. $\iff$ ~~$\forall$~~ $\forall \langle v \rangle, \langle w \rangle \in L$ (punti), $\forall \langle u \rangle \in \langle v, w \rangle$ (retta) si ha $\langle u \rangle \in L$

$\iff$ "per ogni coppia di punti di $L$, $L$ contiene la retta che li congiunge"

▶ **TRM**: PRINCIPIO DI DUALITÀ PROIETTIVA

Dato $\mathbb{S}$ e data $\mathcal{A}$ affermazione, si ha che:

$\mathcal{A}$ è vera (per ogni sp. proiettivo della stessa dim di $\mathbb{S}$) $\iff$ $\mathcal{A}^*$ è vera (per ogni sp. proiettivo della stessa dim. di $\mathbb{S}$)

dove $\mathcal{A}^*$ si ottiene da $\mathcal{A}$ scambiando $\vee$ con $\wedge$, $\wedge$ con $\vee$, $\leq$ con $\geq$, $\dim(\cdot)$ con $\dim \mathbb{S} - 1 - \dim(\cdot)$.

**DIM**: ~~[illegible]~~ $\mathcal{A}$ vera per $\mathbb{S}^* \iff \mathcal{A}^*$ vera per $\mathbb{S}$ (perché $\tau_V$ è antiisomorf. di reticoli)

Dunque $\mathcal{A}$ vera $\forall \mathbb{S} \Rightarrow \mathcal{A}$ vera $\forall \mathbb{S}^* \Leftrightarrow \mathcal{A}^*$ vera $\forall \mathbb{S}$ ~~e viceversa~~

analog. si mostra il viceversa □

**PROP - Def** (S.d.r. PROIETTIVI E COORD. OMOGENEE)

In $(\mathbb{S}, V, \alpha)$ con $\dim_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}) = n$ è equivalente dare:

(a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ORDINATA di $V$ A MENO DI PROPORZIONALITÀ

(b) $n+2$ punti $\underbrace{P_0, P_1, \dots, P_n}_{\text{"edro fondamentale"}}, \underbrace{U}_{\text{"unità"}}$ t.c. dare $\{v_1, \dots, v_n\}$ o $\{\alpha v_1, \dots, \alpha v_n\}$ è la stessa cosa

$P_0 \vee \dots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \dots \vee P_n \vee U = \mathbb{S} \quad \forall i = 1, \dots, n$

e $P_0 \vee \dots \vee P_n = \mathbb{S}$

(b*) $n+2$ iperpiani $p_0, p_1, \dots, p_n, u$ t.c.

$p_0 \wedge \dots \wedge p_{i-1} \wedge p_{i+1} \wedge \dots \wedge p_n \wedge u = \langle 0 \rangle =$ "vuoto proiettivo"

$p_0 \wedge \dots \wedge p_n = \langle 0 \rangle$

**DIM**: (b) $\Leftrightarrow$ (b*) per il trm. di dualità proiettiva, in particolare si ha $p_i = P_i^\perp$, $u = U^\perp$.

(a) $\Rightarrow$ (b): ho $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \longrightarrow P_i = \langle v_{i-1} \rangle$, $U = \langle \sum_{i=1}^{n+1} v_i \rangle$

~~ho $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$~~

(b) $\Rightarrow$ (a)

Dati $P_0, \dots, P_n, U$ devo stabilire un criterio che associ ad ogni $n+2$-upla di punti una base distinta.

Cerco dunque $v_1 \in P_0$, $v_2 \in P_1, \dots, v_{n+1} \in P_n$ t.c. $v_1 + \dots + v_{n+1} \in U$

Posso procedere scegliendo dei rappresentanti $v_{i+1}'$ per i $P_i$ ($P_i = \langle v_{i+1}' \rangle$) e cercare $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K \setminus \{0\}$ t.c. $v_i = \alpha_i v_i'$ verifichino $v_1 + \dots + v_{n+1} \in U$. Il fatto che $P_0 \vee \dots \vee P_n = \mathbb{S}$ garantisce l'esistenza di tali $\alpha_i$, mentre le $n+1$ condizioni $P_0 \vee \dots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \dots \vee P_n \vee U = \mathbb{S}$ garantiscono l'unicità a meno di proporzionalità (con due conti con le $\Sigma$ si vede) □



**Def** S.d.r. DUALE

Dato s.d.r. in $\mathbb{S}(V)$, si associa una base di $V$ (a meno di proporz.) cui si associa a sua volta la base duale (base di $V^*$) (a meno di proporz.), dalla quale infine si ha un s.d.r. per $\mathbb{S}^*$.

Le coord. così trovate su $\mathbb{S}^*(V)$ si dicono COORD. PLÜCKERIANE ($\rightarrow$ DI PLÜCKER).

Le coord. plück. di un p.to di $\mathbb{S}^*(V)$ sono date dai coefficienti della sua equaz. in quanto iperpiano in $\mathbb{S}(V)$.

**ALCUNI MODELLI** di SP. PR. SU $\mathbb{R}$

• SFERA MODULO ANTIPODIA

$\mathbb{S}^n := \{ x \in \underset{E^{n+1}(\mathbb{R})}{\mathbb{R}^{n+1}} \mid |x| = 1 \}$, $x \sim y \Leftrightarrow y = x \vee y = -x$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}^n/_\sim$ è una biezione (in particolare sarebbe anche un isomorf. di spazi topologici).

$\langle v \rangle \longmapsto \left[ \frac{v}{|v|} \right]$

• DISCO MODULO ANTIPODIA DEL BORDO

$\mathbb{D}^n := \{ x \in E^n(\mathbb{R}) \mid |x| \leq 1 \}$, $x \sim_b y \Leftrightarrow x = y \vee |x| = 1, y = -x$

$\mathbb{S}^n_{\geq 0} := \mathbb{S}^n \cap \{x_1 \geq 0\} \Rightarrow$ ~~$\mathbb{S}^n_{\geq 0} \to \mathbb{D}^n$~~

$\Rightarrow \mathbb{S}^n/_\sim \cong \mathbb{S}^n_{\geq 0}/_\sim \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbb{D}^n/_{\sim_b}$ (oss: isom. di sp. topol.)

$[(x_1, \dots, x_{n+1})] \longmapsto [(x_2, \dots, x_{n+1})]$

• RETTA PROIETTIVA REALE ($\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$) COME CIRCONF.:

$\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ isomorf. (è la "proiez. dal polo nord")

$\binom{x}{y} \longmapsto \left\langle \binom{1-y}{x} \right\rangle$

⑥

▶ RETTA COMPLESSA COME SUPERF. SFERICA

proiez. di $\mathbb{S}^2$ su $\{z=0\} \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

$$\mathbb{S}^2 \longrightarrow \{z=0\} \qquad \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \qquad \begin{pmatrix}\text{compattificaz.}\\ \text{di } \mathbb{C} \text{ con} \\ \text{un punto}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x/_{1-z}\\ y/_{1-z}\\ 0\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1-z\\ x+iy\end{pmatrix}$$

▶ DESCRIZ. VARIETÀ PROIETTIVE

- PARAMETRICA: (fissato un s.d.r) $\langle P_1, \dots, P_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \,\middle|\, \alpha_i \in K \; \forall i \right\}$

- CARTESIANA: (fissato un s.d.r) sist. di eq. lin. omogenee che descrivono W. Dati $P_0, \dots, P_m$ t.c. $(\dim P_0 \vee \dots \vee P_m = m+1)$ "$P_0, \dots, P_m$ in posizione generale"
si impone $rK(X, P_0, \dots, P_m) = m+1$ con $X = \begin{pmatrix}x_0\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ (nel s.d.r. scelto)

▶ Def: $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ varietà SGHEMBE := "$\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$" $= \emptyset_{\mathbb{S}} = \langle 0 \rangle$

" " INCIDENTI := "$\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset_{\mathbb{S}}$"

" " COMPLEMENTARI := $\begin{cases}\text{SGHEMBE} \\ \mathbb{L} \vee \mathbb{M} = \mathbb{S}\end{cases}$

▶ OSS/ESP: $\dim_{\mathbb{S}} \mathbb{S} = 4$, $\pi \in \mathbb{S}$ piano, $r \in \mathbb{S}$ retta, $\pi$ e $r$ sghembi $\Big\} \Rightarrow \forall P$ punto esterno a $r$ e $\pi$ $\exists! \, s$ retta incidente $P$, $r$, e $\pi$

▶ OSS/ESP: $\dim_{\mathbb{S}} \mathbb{S} = 3$, $r, s$ rette sghembe $\Rightarrow \forall P$ esterno a $r$ e $s$ $\exists! \, t$ retta incidente $P, r, s$

▶ FORMULA DI GRASSMANN PROIETTIVA ⑦

$\forall s, t \in \mathbb{S}$, $\dim_{\mathbb{S}} s + \dim_{\mathbb{S}} t = \dim_{\mathbb{S}} s \vee t + \dim_{\mathbb{S}} s \wedge t$

DIM: $s = \alpha(U)$, $t = \alpha(V)$, $\dim_K U + \dim_K V = \dim_K U+V + \dim_K U \cap V$

$\Longrightarrow$ tesi (sottraendo 2 ad ambo i membri)

▶ ESZ. CLASSICO

$r, s, t$ rette in $\mathbb{P}^3(K)$ sghembe a 2 a 2 $\Longrightarrow \bigcup_{\substack{P \in t \\ x \text{ retta incidente} \\ P, r \text{ e } s}} x = ?$

SOL: Siano $r: r_1(X) = 0 = r_2(X)$; $\quad s: s_1(X) = 0 = s_2(X)$

$t: \lambda T_1 + \mu T_2$

Allora $P \in \bigcup x \iff \exists \binom{\lambda}{\mu} \neq \binom{0}{0}$ t.c. $P \in (T \vee r) \wedge (T \vee s)$ con $T = \lambda T_1 + \mu T_2$

$\iff \exists \binom{\lambda}{\mu}$ t.c. $P \in T \vee r$ e $P \in T \vee s$

$\iff \exists \binom{\lambda}{\mu}$ t.c. $P = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + K T$ ($\exists \alpha_1, \alpha_2, K$), $P = \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + K' T$ ($\exists \beta$...)

$\iff \exists \binom{\lambda}{\mu}$ t.c. $P - KT \in r$ $\exists K$, $P - K'T \in s$

$\iff \exists \binom{\lambda}{\mu}$ t.c. $\begin{cases} r_1(P-KT) = 0 \\ r_2(P-KT) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} s_1(P-K'T) = 0 \\ s_2(P-K'T) = 0 \end{cases}$

$\left(K = \frac{r_1(P)}{r_1(T)}\right) \qquad \left(K' = \frac{s_1(P)}{s_1(T)}\right)$

sghembe $\Rightarrow r_1(t) \neq 0$, $s_1(t) \neq 0$

$\iff \exists \binom{\lambda}{\mu}$ t.c. $r_2(P) - \frac{r_1(P)}{r_1(T)} r_2(T) = 0$, $s_2(P) - \frac{s_1(P)}{s_1(T)} s_2(T) = 0$

$\iff \exists \binom{\lambda}{\mu}$ t.c. $r_1(T) r_2(P) - r_1(P) r_2(T) = 0$, $s_1(T) s_2(P) - s_1(P) s_2(T) = 0$

$\iff \exists \binom{\lambda}{\mu}$ t.c. $\begin{pmatrix} r_1(T_1) r_2(P) - r_2(T_1) r_1(P) & r_1(T_2) r_2(P) - r_2(T_2) r_1(P) \\ s_1(T_1) s_2(P) - s_2(T_1) s_1(P) & s_1(T_2) s_2(P) - s_2(T_2) s_1(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

sse $\det\begin{pmatrix} " & " \\ " & " \end{pmatrix} = 0$

8

▶ **Def** APPLICAZIONE PROIETTIVA $\varphi: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ :=

$\varphi$ indotta da $f: V \to V'$ lineare, cioè $\varphi(\alpha(W)) = \alpha'(f(W))$
($f$ si dice "sovrastante $\varphi$")

**Def** $\operatorname{Im}\varphi := \alpha'(\operatorname{Im} f)$ considerato in $\mathbb{P}'$ (cioè $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathbb{P}'$)

$\operatorname{Ker}\varphi := \alpha(\operatorname{Ker} f)$ considerato in $\mathbb{P}$

▶ **OSS**: $\dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim(\mathbb{S}) - 1$

▶ **OSS**: $f, g$ sovrastanti $\varphi \iff g = \lambda f \quad \exists \lambda \in K^\times$

**DIM**: "$\Leftarrow$" è evidente.

"$\Rightarrow$" ① $\mathbb{S}(f) = \varphi = \mathbb{S}(g) \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$

② Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ base di un complement. di $\operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow f(\langle v_1 \rangle) = \varphi(\alpha(\langle v_1 \rangle)) = \alpha'(g(\langle v_1 \rangle)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\langle v_1 \rangle) = g(\langle v_1 \rangle) \Rightarrow f(v_1) = \lambda_1 g(v_1)$

analogam. $f(v_i) = \lambda_i g(v_i) \quad \forall i = 1, \dots, r$

e sempre analog. $f(\Sigma_i v_i) = \lambda g(\Sigma_i v_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma_i \lambda_i g(v_i) = \lambda \Sigma_i g(v_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_i = \lambda \ \forall i = 1, \dots, r \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_r$

$\Rightarrow f = \lambda g$ □

9

▶ **OSS** $v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \varphi(\langle v \rangle) = \langle 0 \rangle \notin \mathbb{P}$
($\langle v \rangle \in \mathbb{P}$)

Dunque $\varphi: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ NON induce un'appl. tra $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$,
ma, al più, tra $\mathbb{P} \setminus \operatorname{Ker}\varphi$ e $\mathbb{P}'$

▶ **OSS** $f: V \to V'$ lineare, allora $\mathbb{S}(f): \mathbb{S}(V) \to \mathbb{S}(V')$, $W \longmapsto f(W)$ verifica:

1) $\mathbb{S}(f)(0) = 0$

2) $\dim_K [\mathbb{S}(f)(W)] \leq \dim_K W$

3) $\mathbb{S}(f)(W \cap W') \subseteq \mathbb{S}(f)(W) \cap \mathbb{S}(f)(W')$ (Non "=" in generale)

4) $\mathbb{S}(f)(W + W') = \mathbb{S}(f)(W) + \mathbb{S}(f)(W')$

5) $W \leq W' \Rightarrow \mathbb{S}(f)(W) \leq \mathbb{S}(f)(W')$

6) $\mathbb{S}(f)(W) = \mathbb{S}(f)(W') \iff W + \operatorname{Ker} f = W' + \operatorname{Ker} f$

▶ **ESZ**: $\varphi: \mathbb{S}(V) \to \mathbb{S}(V')$ verifica 2), 4), 6) $\Rightarrow \exists ?\ f: V \to V$ lineare t.c. $\varphi(W) = f(W)$

▶ **Def** PROIETTIVITÀ := "appl. proiett. $\varphi$" da $\mathbb{S}$ IN SÉ

t.c. $\operatorname{Ker}\varphi = \emptyset_{\mathbb{S}}$ $(\Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{S})$

▶ OSS $\varphi$ proiettività $\Leftrightarrow$ $f$ automorfismo

▶ OSS $\varphi$ proiettività $\Rightarrow$ $\varphi$ induce una biez. da $\mathbb{P}$ in sé

▶ ESPRESSIONE MATRICIALE: stabilendo due s.d.r., uno per $\mathbb{P}(V)$ e uno per $\mathbb{P}(V)$, si stabilisce una biez. tra $\{\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V') \text{ proiettiva}\}$ e $PGL_n(K) = \dfrac{GL_{n+1}(K)}{K^{\times}}$.

▶ ESPi FONDAMENTALI:

(NOTAZIONE: $t = \alpha(W)$, $t' = \alpha(W')$, $T = \alpha(\mathbb{S}(W))$, $T^*$ = stella di $\mathbb{S}$ di sostegno $t$ (= sottosp. di $\mathbb{S}^*$ di sostegno $t$); sottosp. di $\mathbb{S}$ di sostegno $t$)

- INCLUSIONE di $T$ in $\mathbb{S}$: La $f$ sovrastante è l'inclusione di $W$ in $V$

  OSS ⚠ $S \mapsto S \wedge t$ NON È appl. proiett.

- PROIEZIONE SU UNA STELLA: $S \mapsto S \vee t$ è appl. pr.
  $$\mathbb{S} \to T^*$$
  $f$ è la proiezione $V \to \frac{V}{W}$, $v \mapsto v+W$

- PROIEZ. DA UN SOTTOSP. A UNA STELLA:
  $\varphi : T' \to T^*$, $S \mapsto S \vee t$ è appl. pr., $f : W' \to \frac{V}{W}$, $w' \mapsto w'+W$

  È PROIETTIVITÀ SSE $t'$ e $t$ sono complement.. IN TAL CASO SI HA LA SEGUENTE:

- SEZIONE DI UNA STELLA CON UN SOTTOSPAZIO:
  (Se $t$ e $t''$ complem.) $\varphi : T^* \to T''$, $\varphi(u) = u \wedge t''$. $f$ è l'inversa dell'isomorf. $W'' \to \frac{V}{W}$, $w'' \mapsto w''+W$



- PROIEZ. TRA SOTTOSPAZI (TRAMITE UNA STELLA)
  (Se $t$ e $t''$ complement.)

  $\varphi : T' \to T''$, $u \mapsto (u \vee t) \wedge t''$ ottenuta componendo una proiezione e una sezione: $T' \to T^* \to T''$, $u \mapsto u \vee t \mapsto (u \vee t) \wedge t''$

  anche $f$ si ottiene per composizione

▶ OSS (DECOMP. DI APPL. PROIETT.)

$f : V \to V'$ lineare $\Rightarrow f = \left(V \to V/_{\operatorname{Ker} f} \to \operatorname{im} f \to W\right)$

$\Rightarrow$ ogni appl. proiett. si può scrivere come composiz. di una proiezione + proiettività + inclusione

OSS ⚠ solo le ultime due si possono scrivere per gli sp. puntegg.iati.

▶ $\boxed{\text{TRM}}$: dato un s.d.r. su $\mathbb{P}(V)$ e uno su $\mathbb{P}(V')$, con $\dim V = \dim V'$, $\exists!\, \varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ appl. proiett. t.c. manda il primo s.d.r. ordinatamente nel secondo, ed è una proiettività.

DIM: Segue dall'analogo trm. sugli spazi vett. e dalla equivalenza tra riferim. proiettivo e base dello sp. sovrastante

▶ **Def** DUALE DI UNA APPL. PR.:

$\varphi$ appl. pr. con $f$ sovrast. $\Rightarrow \varphi^* : \mathbb{S}(V'^*) \to \mathbb{S}(V^*)$ avente $f^* : V'^* \to V^*$ sovrastante

▶ ESPi:
- IMMERSIONI e PROIEZIONI sono duali tra di loro
- SEZIONI DI STELLE sono autoduali
- PR. TRA SOTTOSPAZI (TRAMITE STELLA) $\longleftrightarrow$ PROIEZ. TRA STELLE (TRAMITE SOTTOSPAZIO)

**Def** " $S \in \mathbb{S}$ è unito per $\varphi$ " := " $\varphi(S) = S$ "

**Def** " $S \in \mathbb{S}$ è ELEM.TO DI P.TI UNITI " := " $\forall P \in S,\ \varphi(P) = P$ "

**OSS** $P = \langle v \rangle$ è p.to unito per $\varphi$ $\iff$ $v$ è autovett. dell'appl. lin sovrastante $\varphi$

**PROP:** $\varphi$ ha tutti i suoi autoval. in $K$ $\Rightarrow$ $\exists L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{n-1}$ bandiera di varietà unite $(\dim_S L_i = i)$

**DIM:** $f$ sorrast. è triangolarizzabile $\square$

⚠ gli autoval. di una $\varphi$ non sono fissi! Dipendono dalla matrice $A$ scelta (tra le possibili $\lambda A$).

I loro rapporti però sono fissi.

**OSS** $\pi$ è iperpiano unito per $\varphi$ $\iff$ $a_\pi^t$ è autovett. di $A^t$

$\pi$ ha equaz. $a_\pi X = 0$

$\varphi$ ha matrice $A$

**DIM:** $\varphi(\pi) = \{Q \in \mathbb{P} \mid Q = \varphi(P)\ \exists P \in \pi\} = \{Q \in \mathbb{P} \mid x_Q = A x_P \text{ e } a_\pi X_P = 0\ \exists P\} =$

$= \{Q \in \mathbb{P} \mid A^{-1} x_Q = x_P \text{ e } a_\pi x_P = 0\ \exists x_P\} =$

$= \{Q \in \mathbb{P} \mid a_\pi A^{-1} x_Q = 0\} =$ iperp. di eq $(a_\pi A^{-1}) x_Q = 0$

$\Rightarrow \varphi(\pi) = \pi$ sse $a_\pi A^{-1} = \mu a_\pi$ $\exists \mu \neq 0$ sse $\frac{1}{\mu} a_\pi = a_\pi A$ $\exists \mu$ sse

sse $A^t a_\pi^t = \frac{1}{\mu} a_\pi^t$ sse " $a_\pi^t$ è autovett. per $A^t$ " $\square$



**RELAZ. TRA P.TI E IPERP. UNITI**

(1) $P$ p.to unito associato all'autoval. $\lambda$
$\pi$ iperp. " " $\mu \neq \lambda$
$\Rightarrow P \leq \pi$

(2) $P$ p.to " " " $\lambda$
$\pi$ iperp " " " $\lambda$
$P \leq \pi$
$\Rightarrow \lambda$ ha molteplicità $> 1$

(2') $P$ e $\pi$ associati a $\lambda$
$P$ e $\pi$ sono gli unici p.to e iperp. uniti associati a $\lambda$
$\Rightarrow$ " $P \leq \pi \iff \lambda$ ha moltepl. $> 1$ "

(INSOMMA) A ogni blocco di Jordan sono associati esattam. un p.to e un iperp. uniti.

Il p.to di un blocco appartiene a tutti gli iperp. degli altri blocchi.

Il p.to di un $J_\alpha$ appartiene all'iperp. dello STESSO $J_\alpha$ sse $J_\alpha$ ha ordine $> 1$.

**Def: INVOLUZIONE** : " proiettività $\varphi$ t.c. $\begin{cases} \varphi \neq id \\ \varphi^2 = id \end{cases}$ "

**OSS** Se $K$ è algebricam. chiuso $\Rightarrow$ " $\varphi$ involuz. $\iff$ $\exists L, M$ sottosp. complem. di punti uniti associati ad autoval. opposti

**OSS** $\forall$ retta $P \vee Q$ con $P \in L$, $Q \in M$, $\varphi$ induce su di essa una involuz. avente $P$ e $Q$ come p.ti uniti.

**DUALITÀ:** LA DUALE DI UNA INVOLUZ. È UNA INVOLUZ.

# OMOLOGIA

▶ **Def** OMOLOGIA := "proiettività $\varphi$ t.c. $\begin{cases} \varphi \neq id \\ \exists \text{ perp. di p.ti uniti} \end{cases}$" ("asse di omologia")

OSS Per dualità $\exists P$ t.c. $P$ è centro di una stella di iperp. uniti ("centro di omologia")

▶ 2 TIPI DI OMOLOGIA:

$\boxed{\text{TIPO 1}}$: GENERALE, se il centro NON appartiene all'asse

Matrice: $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$; $\dfrac{\mu}{\lambda}$ si dice "invariante dell'omologia"

$\boxed{\text{TIPO 2}}$: SPECIALE, se il centro appartiene all'asse

Matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & \lambda \mathbb{1}_n \\ 0 & & \end{pmatrix}$

▶ DUALITÀ: LA DUALE DI UNA OMOLOGIA È UNA OMOLOGIA (DELLO STESSO TIPO)

▶ SPAZI PR. VS SP. AFFINI

- IMMERSIONE STANDARD: $\mathbb{A}^n(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è un isom. tra $\mathbb{A}^n(K)$ e $U_0 := \{x \in \mathbb{P}^n(K) : x_0 \neq 0\}$

- DESCRIZ. RICORSIVA DI $\mathbb{P}^n(K)$: $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{A}^n(K) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K) = \ldots = \mathbb{A}^n(K) \sqcup \mathbb{A}^{n-1}(K) \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0(K)$

QUINDI OSS: $\mathbb{P}^n(K) \neq \underbrace{\mathbb{P}^1(K) \times \ldots \times \mathbb{P}^1(K)}_{n\text{-volte}}$ !



▶ $\boxed{\text{TRM}}$ AFFINITÀ E PROIETTIVITÀ

$A \in PGL(n, K)$, matrice di una proiettività di $\mathbb{P}^n(K)$, si restringe ad una affinità di $\mathbb{A}^n(K)$ SSE è (proporzionale a una matr.) della forma $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & B' \end{pmatrix}$ (SSE lascia globalmente unito l'iperpiano di eq. $x_0 = 0$)

Viceversa ogni affinità di $\mathbb{A}^n(K)$ si estende unicamente ad una proiettività di $\mathbb{P}^n(K)$ della forma suddetta.

DIM: Se la $1^a$ riga non fosse $(1\ 0 \cdots 0)$ allora ci sarebbero punti affini $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ mandati in un punto improprio $\left(\text{cioè } \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix}\right)$. Il resto è ovvio.

▶ $\boxed{\text{TRM}}$ TRASLAZIONI

Le trasl. di $\mathbb{A}^n(K)$ sono restrizioni di proiettività che lasciano PUNTUALMENTE unito l'iperp. $x_0 = 0$.

Sono dunque OMOLOGIE di asse l'iperp. $x_0 = 0$ ← (iperp. improprio)

Il centro di omologia corrisponde alla direzione di traslazione.

DIM: Le traslaz. di vett. $v$ hanno matr. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$, da cui il resto è ovvio.

▶ ESP: Simmetria (affine) di asse $V$ e direzione $U$ $\longleftrightarrow$ Involuzione con $V$ e $U$ come spazi di p.ti uniti, dove $U \leq \{x_0 = 0\}$

▶ **Def** COMPLETAMENTO PROIETTIVO DI UNA VARIETÀ LIN. AFFINE:

$L \subset \mathbb{A}^n(K)$, $L$ ha eq. $At + a = 0$ (eq. in $t$)

"completam. pr. di $L$" $= \overline{L} := \{x \in \mathbb{P}^n : (a \;\; A)x = 0\}$

OSS: $\overline{L} \setminus L = \left\{\begin{pmatrix}0\\x'\end{pmatrix} : Ax' = 0\right\}$ = spazio direttore di $L$

OSS: $\overline{L}$ = "la più piccola varietà proiett. contenente $L$"

▶ **Def** SCHELETRO AFFINE DI UNA VAR. PROIETT.:

$W \leq K^{n+1}$, $M = \mathbb{P}(W)$ (= varietà lin. proiett.)

"schel. affine di $M$" $:= M \cap \mathbb{A}^n$ $(= \{x \in M : x_0 \neq 0\})$

▶ OSS: $\overline{L} \cap \mathbb{A} = L$ sempre

$\overline{M \cap \mathbb{A}} = M$ sse $M \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$

▶ PARALLELISMO: $L, M$ var. lin. di $\mathbb{A}^n$ $\Rightarrow$ $M \| L$ sse

sse $\overline{M} \cap \overline{L} \leq \{x_0 = 0\}$

▶ $\boxed{\text{TRM}}$: $H \in \mathbb{P}$, $H$ iperpiano $\Rightarrow \mathbb{P} \setminus H$ resta canonicamente munito di una struttura di sp. affine con sp. delle traslaz. $T = \{\varphi \in PGL(\mathbb{P}) : \varphi|_H = id_H$ e $\varphi(x) \neq x \;\forall x \notin H\}$

$\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ sono le coord. affini associate su $\mathbb{P} \setminus H$

DIM: ① $T$ è sp. vett. di dimens. $= \dim_{\mathbb{S}} \mathbb{P}$

(somma = composiz. di omologie; scalari: omolog. general.* di asse $H$; prodotto per gli scalari: coniugio, cioè $g \cdot S = g^{-1} \circ S \circ g$) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & I_n\end{pmatrix}$

② Verifica delle propr. di sp. affine (in opportuno s.d.r., dove le omol. speciali sono ...)

*e le generali sono $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}$



▶ Se $K = \mathbb{R}$, allora si possono considerare le usuali nozioni sullo sp. euclideo.

▶ **Def** SUPPORTO DELL'ASSOLUTO EUCLIDEO $:= \left\{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 0\right\}$

**Def** "$x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è PUNTO CICLICO" $:=$ $x \in \mathrm{Supp}(\text{assoluto euclideo}) \cap \{x_0 = 0\}$

cioè $\begin{cases}\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 0\\ x_0 = 0\end{cases}$

▶ OSS (UNITÀ DI MISURA):

Conosco i p.ti ciclici $\Longrightarrow$ conosco il prod. scalare a meno di una cost. moltiplicativa $\neq 0$

▶ IDEA DIETRO I PUNTI CICLICI

L'eq. di un "cerchio" in $\mathbb{R}^n$ è

$x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$; omogeneizzando l'eq. ho

$-R^2 x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$, e i punti ciclici sono tutti e soli i punti all'infinito che verificano tale equaz..

(In generale se ho un $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (pr. scalare), allora l'eq. del cerchio è $\langle x, x \rangle = R^2$, dunque di nuovo si può omogeneizzare e osservare che i p.ti ciclici sono dati da $\langle x, x \rangle = 0$)

▶ DISTANZA:

$A, B \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ Stabilisco un $A'$ t.c. $d(A,A')=1$

ed ho $d(A,B) = (\infty \ A \ A' \ B)$ ← birapporto

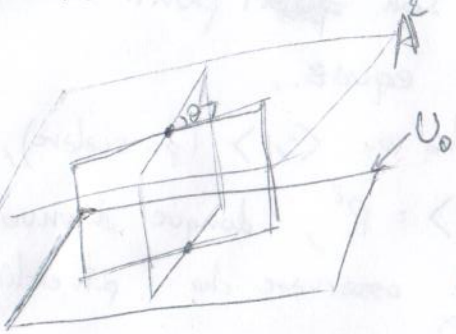
▶ ANGOLI (FORMULA DI LAGUERRE)

~~Sia~~ Siamo sul PIANO EUCLIDEO (dunque poi saremo nel piano proiettivo). Siano $p, q$ rette incidenti, siano $i, j$ le due "rette cicliche" per $p \wedge q$, cioè le rette per $p \wedge q$ e i punti ciclici $\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$.

Sono due rette COMPLESSE e CONIUGATE il cui unico punto reale è $p \wedge q$. RISULTA CHE

$$\boxed{(p \ q \ i \ j) = e^{-2i\theta} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta \quad (\text{con } \theta \text{ l'angolo tra } p \text{ e } q)}$$

DIM: ~~in opportune coord. proiettive~~ Considero $p$ e $q$ nello ~~piano~~ spazio euclideo. Per l'invarianza dell'assoluto euclideo per isometrie posso assumere WLOG che $p \equiv$ asse $x$ $\left(\Rightarrow p: \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}\right)$, che $q$ sia sul piano $Oxy$ e passante per $O$ $\left(\Rightarrow q: \begin{cases} z=0 \\ y=\tan\theta x \end{cases}\right)$




Insomma posso considerare di essere sul piano euclideo con $p: y=0$, $q: y=\tan\theta x$; ORA omogeneizzando le eq. ho $y=0z$, $y=\tan\theta x+0z$

$\Rightarrow$ in coord. plücker. $p=(0, [illegible], +1)$, $q=(0, \tan\theta, -1)$; INFINE i p.ti ciclici di $p \vee q$



~~Sono~~ (con $p$ e $q$ considerati sempre p.ti del duale)

Sono gli $\langle(0 \ a \ b)\rangle$ t.c. $a^2+b^2=0$, cioè sono $\langle(0 \ 1 \ i)\rangle$, $\langle(0 \ 1 \ -i)\rangle$, ~~Il birapporto~~

che hanno coord. affine (nella retta duale $p \vee q$) $\frac{1}{i}=-i$ e $\frac{1}{-i}=i$. Il birapporto vale

$$(p \ q \ i \ j) = (0 \ \ -\tan\theta \ \ \cancel{i} -i \ \ i) =$$

$$= \frac{(-i-0)(i+\tan\theta)}{(-i+\tan\theta)(i-0)} = \frac{-\cancel{i}(i+\tan\theta)}{\cancel{i}(\tan\theta - i)} = \frac{-i+\frac{\operatorname{Sen}\theta}{\cos\theta}}{-i+\frac{\operatorname{Sen}\theta}{\cos\theta}} =$$

$$= \frac{-\operatorname{Sen}\theta - i\cos\theta}{\operatorname{Sen}\theta - i\cos\theta} \cdot \frac{i}{i} = \frac{\cos\theta - i \operatorname{Sen}\theta}{\cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta} = \frac{e^{i(-\theta)}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta} \qquad \square$$

▶ ~~TALVOLTA~~ FORMULA DI LAGUERRE (Nella forma in cui usualmente viene scritta)

$$\theta = \frac{i}{2} \log(p \ q \ i \ j)$$

20

▶ RETTA PROIETTIVA : $\mathbb{P}^1(K) \longleftrightarrow \mathbb{A}^1(K) \sqcup \{\infty\} \longleftrightarrow K \sqcup \{\infty\}$ (Punto all'infinito: $\infty$)
(come identificarla)

▶ PROIETTIVITÀ DELLA RETTA e TRASF. DI MOEBIUS

proiettività $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[x = \frac{x_1}{x_0}]{} $ Trasf. di moebius $x \longmapsto \dfrac{c + dx}{a + bx}$

▶ OSS: $\varphi : K\cup\{\infty\} \to K\cup\{\infty\}$ proiettività
(distinti) $a, b, c \in K\cup\{\infty\}$
~~$\varphi(a) = \infty, \varphi(b)$~~
$\varphi : a \longmapsto \infty, \; b \longmapsto 0, \; c \longmapsto 1$

$\Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}$

▶ Def BIRAPPORTO (1ª definiz., con le trasf. di Moebius)

$a, b, c \in K\cup\{\infty\}$ distinti $\Rightarrow \forall x \in K\cup\{\infty\} \quad (a\ b\ c\ x) := \dfrac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}$

▶ OSS: $\psi$ trasf. di moebius $\Rightarrow (a\ b\ c\ x) = (\psi(a)\ \psi(b)\ \psi(c)\ \psi(x))$
$\forall a, b, c, x \in K\cup\{\infty\}$

DIM: Modo 1: $\psi$ trasf. di moebius (proiettività) $\Rightarrow$ la proiettività che manda $\psi(a) \mapsto \infty$, $\psi(b) \mapsto 0$, $\psi(c) \mapsto 1$ è $\varphi \circ \psi^{-1}$ (dove $\varphi$ è come sopra)

$\Rightarrow (\psi(a)\ \psi(b)\ \psi(c)\ \psi(x)) = \varphi\circ\psi^{-1}(\psi(x)) = \varphi(x)$ □

Modo 2: Conto diretto.

21

▶ Def BIRAPPORTO (CROSS RATIO in inglese) (2ª def, con coord. omog.)

$\left.\begin{array}{l} A, B, C, X \in \mathbb{P}^1(K) \\ A, B, C \text{ in posiz. generale (sse distinti)} \end{array}\right\} \Rightarrow (A\ B\ C\ X) := \dfrac{x_0}{x_1}$ (mi sa che è $\dfrac{x_1}{x_0}$ in realtà)

dove $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ sono le coord. omog. di $X$ nel s.d.r. proiettivo $\{A, B, C\}$

▶ INVARIANZA PROIETTIVA: $\psi$ proiettività $\Rightarrow (\psi(a) \cdots \psi(x)) = (a\ b\ c\ x)$

VICEVERSA $\left.\begin{array}{l} \varphi : K\cup\{\infty\} \xrightarrow[su]{1-1} K\cup\{\infty\} \\ \varphi \text{ rispetta i birapporti} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi$ è (proiettività) Trasf. di Moebius

▶ PROP: in un s.d.r. qualsiasi si ha $\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) = \dfrac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}}$

DIM:

determino prima il s.d.r. $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, cioè ne trovo una base (a meno di proporzionalità) in $K^2$: $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ è l'unità $\Rightarrow$ La base sarà data da $\left\{\lambda\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \mu\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}\right\}$ t.c. $\exists\, k \neq 0$ per cui $\lambda\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 = kc_0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 = kc_1 \end{cases} \overset{\text{cramer}}{\Leftrightarrow} \lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} kc_0 & b_0 \\ kc_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \quad \mu = \dfrac{\begin{vmatrix} a_0 & kc_0 \\ a_1 & kc_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$

ORA Trovo le coord. di $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ nella base trovata:

cerco $\gamma, \delta$ t.c. $\gamma\left(\lambda\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\mu\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) = k'\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $(k' \neq 0)$

come prima ho $\gamma = \dfrac{\begin{vmatrix} k'x_0 & \lambda a_0 \\ k'x_1 & \lambda a_1 \end{vmatrix}}{|\ :\ \ :\ |}, \quad \delta = \dfrac{\begin{vmatrix} \mu b_0 & k'x_0 \\ \mu b_1 & k'x_1 \end{vmatrix}}{|\ :\ \ :\ |}$

viene il reciproco perché $\dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{x_0}{x_1}$.

ALLA FINE HO $\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right) = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{k'\lambda \cdot \begin{vmatrix} x_0 & a_0 \\ x_1 & a_1 \end{vmatrix} \Big/ \mu\lambda\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{k'\mu\begin{vmatrix} b_0 & x_0 \\ b_1 & x_1 \end{vmatrix} \Big/ \mu\lambda\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \dfrac{k\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & a_0 \\ x_1 & a_1 \end{vmatrix}}{k\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & x_0 \\ b_1 & x_1 \end{vmatrix}}$

**TRM**: AZIONE DELLE PERMUTAZIONI

Se $(A\ B\ C\ D)=\lambda$, allora:

$(ABCD) = (BADC) = (DCBA) = (CDAB) = \lambda$

$(BACD) = (ABDC) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\lambda}$

$(ACBD) = (CADB) = (DBCA) = (BDAC) = 1-\lambda$

$\dots = \frac{\lambda}{\lambda-1}$

$\dots = \frac{1}{1-\lambda}$

$\dots = \frac{\lambda-1}{\lambda}$

IN SOSTANZA: $(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot) = \frac{1}{\lambda}$; $(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot) = 1-\lambda$

e gli altri casi seguono per composizione.

**DIM**: $(\infty\ 0\ 1\ \lambda)=\lambda \Rightarrow (0\ \infty\ 1\ \lambda) = \frac{(1-0)(\lambda-\infty)}{(1-\infty)(\lambda-0)} = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow (\infty\ 1\ 0\ \lambda) = \frac{(0-\infty)(\lambda-1)}{(0-1)(\lambda-\infty)} = 1-\lambda$

Il resto segue per composizione □



**Def** QUATERNA ARMONICA := "$A, B, C, X$ t.c. $(A\ B\ C\ X) = -1$"

In tal caso si dice che $C$ e $X$ SEPARANO (o SONO SEPARATI) ARMONICAMENTE (DA) I PUNTI $A$ e $B$.

**ESP.i** IL QUARTO ARMONICO DOPO...

- ... $a, b, \infty$ è la media aritm. $\frac{a+b}{2}$
- ... $a, b, 0$ è la media armonica $\frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}$
- ... $a, b, 1$ è $\frac{a+b-2ab}{2-a-b} = -ab\,\frac{2-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{2-a-b}$
- ... $a, -a, c$ è $\frac{a^2}{c}$ ovvero $(a,-a,c,d)=-1$ sse $|a| = \sqrt{cd}$ = media geom.

**OSS.i**:
- $(0\ \infty\ x\ -x) = -1$ $\forall x \neq 0, \infty$
- $(a, -a, x, \frac{a^2}{x}) = -1$ $\forall a \neq 0\ \forall x \neq a$

**OSS.i**
- (Trm. media aritm.:) $M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow \|A-M\| = \|B-M\|$
- (Trm media armonica:) usando $A$ come origine si vede $\frac{2}{\|B-A\|} = \frac{1}{\|C-A\|} + \frac{1}{\|D-A\|}$
- (Trm media geom.:) usando $M = \frac{A+B}{2}$ come origine si vede $\|A-M\|^2 = \|C-M\|\,\|D-M\|$

**Def** SEQUENZA ARMONICA: "$A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}^1(K)$ t.c. $\forall i\ \exists P \in \mathbb{P}^1(K)$ t.c. $(P\ A_i\ A_{i-1}\ A_{i+1}) = -1$"

## TRM ARMONIA E INVOLUZIONI

① $\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ involuz. di } \mathbb{P}^1(K)\\ A, B \text{ p.ti uniti di } \varphi\end{array}\right\} \Rightarrow \forall P \neq A,B \quad (A\ B\ P\ \varphi(P)) = -1$

② $\left.\begin{array}{l}A, B \in \mathbb{P}^1(K)\\ c \in K \setminus \{0, \infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\ \varphi$ proiettività di $\mathbb{P}^1(K)$ t.c. $\left\{\begin{array}{l}A, B = \text{UNICI p.ti fissi di } \varphi\\ (A\ B\ P\ \varphi(P)) = c \quad \forall P \in \mathbb{P}^1(K)\end{array}\right.$

inoltre $\varphi$ è involuz. SSE $c = -1$

**DIM:**

① $(A\ B\ P\ \varphi(P)) =: \lambda$, allora

$\lambda = (A\ B\ P\ \varphi(P)) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(P), \varphi(\varphi(P))) = (A\ B\ \varphi(P)\ P) =$

$= \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Se $\lambda = 1 \Rightarrow \varphi(P) = P$ (perché per def. di birapporto $\varphi(P) = \binom{a}{a} = \binom{1}{1}$ nel s.d.r $\{A, B, P\}$, ma poiché $P$ è l'unità le sue coord. sono $\binom{1}{1}$) ⚡

Quindi $\lambda = -1$

② Nel s.d.r. $\{A, B, U\}$ $\varphi$ deve avere matrice $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ per la 1ª condiz. (cioè $A$ e $B$ UNICI p.ti fissi). Per la 2ª condiz. si ha $\left(\binom{1}{0}\binom{0}{1}\binom{a}{b}\binom{\lambda a}{\mu b}\right) = c \Leftrightarrow \frac{-b \cdot \lambda a}{-a \cdot \mu b} = c \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} = c$

$\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Dunque $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ è determinato a meno di un fattore moltiplicativo, quindi $\varphi$ è unica

## TRM FONDAM. DELLE PR.IVITÀ DELLA RETTA



• **Def** 6-PROIETTIVITÀ: "applicazione proiettiva indotta da un $\sigma$-isomorfismo"

~~Dove $\sigma$ isomorfismo~~ $\sigma: K \to K'$ è isom. di campi e

$\sigma$-isomorf. := "$f: V \to V'$ t.c. $f(cv) = \sigma(c) f(v)$ ($\sigma$-lineare) e che è biettiva"

$V$ e $V'$ c.vett su $K$ e $K'$ rispettiv.

$\left.\begin{array}{l}\sigma: K \to K' \text{ iso di campi}\\ \varphi: \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K') \text{ \underline{suriettiva}}\\ (\varphi(A)\ \varphi(B)\ \varphi(C)\ \varphi(D)) = (\sigma(A)\ \sigma(B)\ \sigma(C)\ \sigma(D))\\ \forall A,B,C,D\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi$ è $\sigma$-proiettività

VICEVERSA

$\left.\begin{array}{l}\varphi: \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K')\\ \text{caratter. di } K \text{ e } K' \neq 2\\ \varphi \text{ conserva le quaterne armoniche}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \sigma: K \to K'$ iso t.c. $\varphi$ è $\sigma$-proiettività

**DIM**: omessa

**OSS**: ponendo $K = K'$, $\sigma = id$ si ha "le proiettività tra rette sono le applicaz. biunivoche che conservano il birapporto/le quaterne armoniche"

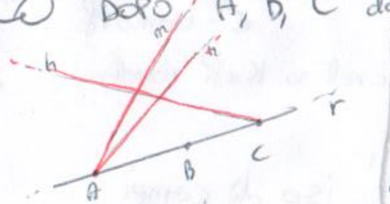
COROLL.(1): $\varphi: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ collineazione $\Rightarrow$ "$\varphi$ è proiettività sse conserva i birapporti (delle quaterne ordinate di p.ti allineati)"

COROLL. (2): $\varphi: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ collin. $\Rightarrow$ "$\varphi$ è $\sigma$-proiettività sse conserva l'armonia (delle quaterne ordinate di p.ti allineati)"

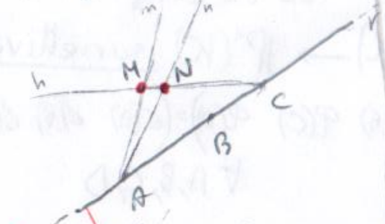
# COSTRUZIONI CLASSICHE NEL PIANO PROIETTIVO

## QUARTO ARMONICO DOPO A, B, C dati:

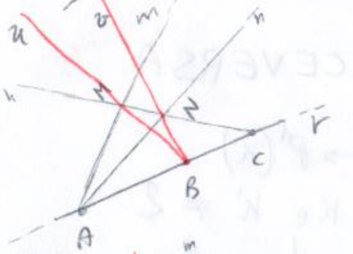
1) Traccio due (qualsiasi) rette $m$, $n$ ~~rette~~ per $A$ e $h$ retta (quals.) per $C$



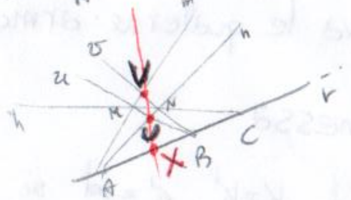

2) Individuo $M = m \wedge h$
$N = n \wedge h$




3) Traccio $u := M \vee B$
e $v := N \vee B$




4) Individuo $U := u \wedge h$
e $V := v \wedge m$ e
Trovo $X := (U \vee V) \wedge r$
$X$ è il 4° armonico dopo $A, B, C$.




DUALIZZANDO LA COSTRUZ. SI HA LA COSTRUZ. DELLA 4ª ARMONICA DOPO 3 RETTE IN UN FASCIO

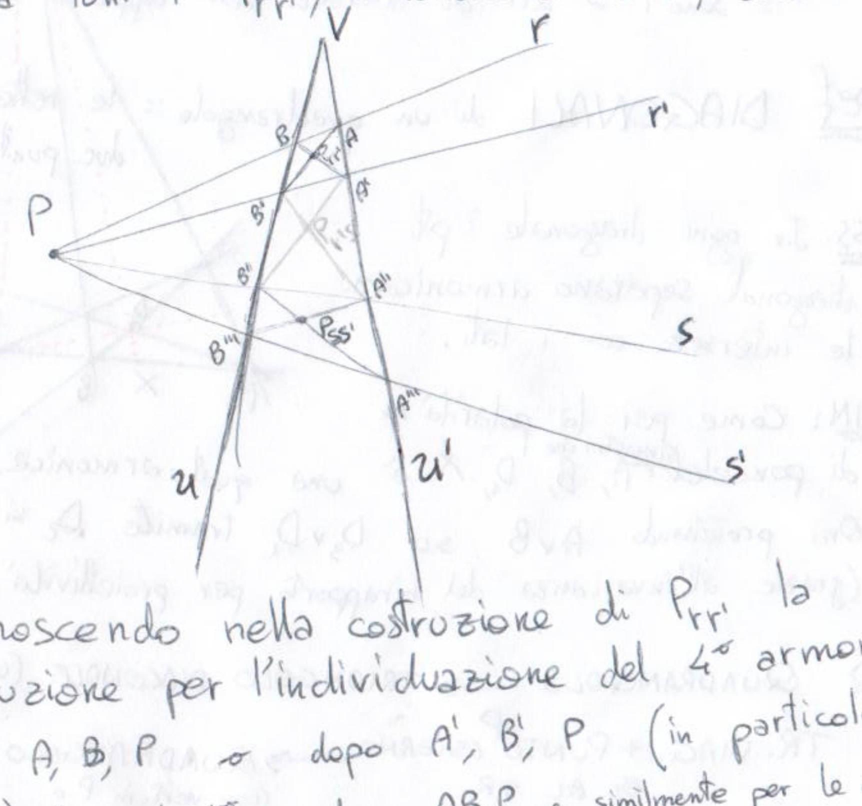
DIM: Considerando la proiettività di $r$ in sé $\varphi$ t.c.
$\varphi: P \longmapsto ((P \vee V) \wedge h) \vee U) \wedge r$ (composiz. di due proiez., la prima da $r$ ad $h$, l'altra da $h$ ad $r$) si osserva che è una involuzione avente $X$ e $C$ come p.ti fissi, ~~dunque~~ e t.c. $B = \varphi(A)$, $A = \varphi(B)$ $\Rightarrow -1 = (XCAB) = \frac{1}{(ABCX)}$ □



## POLARITÀ DI PONCELET di una coppia di rette rispetto a un punto.

Siano $u, u'$ rette distinte in un piano proiettivo e $P$ un p.to esterno ad esse;
$\forall r, r'$ rette per $P$, $P_{rr'} := [(r \wedge u) \vee (r' \wedge u')] \wedge [(r \wedge u') \vee (r' \wedge u)]$;
Allora tutti i $P_{rr'}$, al variare di $r$ e $r'$, sono allineati.

DIM:




Riconoscendo nella costruzione di $P_{rr'}$ la costruzione per l'individuazione del 4° armonico dopo $A, B, P$ o dopo $A', B', P$ (in particolare $(V \vee P_{rr'}) \wedge r$ è il 4° arm. dopo $A, B, P$ e similmente per le altre terne), si arriva presto alla conclusione.
Infatti considerando $P_{r's}$ si osserva che sia $P_{r's} \vee V$ che $P_{rr'} \vee V$ individuano su $r'$ il 4° arm. dopo $A', B', P$.
Dunque $V$, $P_{rr'}$ e $P_{r's}$ sono allineati. Analogamente si vede che $V, P_{r's}, P_{ss'}$ sono allineati, e dunque $V, P_{rr'}, P_{ss'}$ sono allineati e ~~in gener~~ $V \vee P_{rr'} = \{P_{ss'} \mid s, s' \in P^*\}$ □

(28)

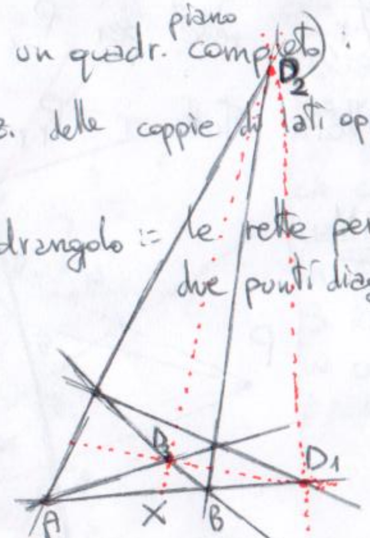
▶ **Def** QUADRANGOLO PIANO COMPLETO:

:= "insieme di 4 p.ti a 3 a 3 non allineati e delle 6 rette che ~~passa~~ li congiungono (dette lati)"

**Def** PUNTI DIAGONALI (di un quadr. piano complet.):

:= Sono i 3 p.ti di intersez. delle coppie di lati opposti

**Def** DIAGONALI di un quadrangolo := le rette per due punti diagonali




**OSS**: In ogni diagonale i p.ti diagonali separano armonicam. le intersez. con i lati.

**DIM**: Come per la polarità di poncelet si mostra che $A, B, D_1, X$ è una quat. armonica.
Ora proiettando $A \vee B$ su $D_3 \vee D_1$ tramite $D_2$ si ha la tesi (grazie all'invarianza del birapporto per proiettività).

**OSS** QUADRANGOLO ⟶ TRIANGOLO DIAGONALE (UNICO)

TR. DIAG. + PUNTO $P$ ESTERNO AL TR. ⟶ QUADRANGOLO (UNICO) (con vert. in $P$ e tr. diag. quello dato)

▶ DUALIZZANDO TUTTO SI HA IL
QUADRILATERO PIANO COMPLETO + RETTE DIAGONALI + PUNTI DIAGONALI + ARMONIA E RETTE DIAGONALI + RELAZIONE QUADRILATERI-TRILATERI (DIAGONALI)

(29)

▶ $\boxed{\text{TRM}}$ DI PAPPO

$$\left.\begin{array}{l} r, r' \text{ rette distinte in } \mathbb{P}^2(K) \\ A, B, C \in r \setminus r \wedge r' \\ A', B', C' \in r' \setminus r \wedge r' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (A \vee B') \wedge (A' \vee B) \\ (A \vee C') \wedge (A' \vee C) \\ (B \vee C') \wedge (B' \vee C) \end{array} \text{ Sono allineati sul "ASSE DI COLLINEAZIONE" } a$$

INOLTRE $r \wedge r' \in a \Leftrightarrow A \vee A', B \vee B', C \vee C'$ concorrono

**DIM**: considero il s.d.r. $\{P_0, R, R'\}$ dove

$P_0 = r \wedge r'$, $R \in r \setminus \{P_0\}$, $R' \in r' \setminus \{P_0\}$.

In questo s.d.r. $A, B, C = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$

$A', B', C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c' \end{pmatrix}$

**LEMMA**: $P, Q \in \mathbb{P}^2(K)$, $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow P \vee Q : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ (in coord pluck.)

$r, s \in \mathbb{P}^2(K)$ (rette), $r = (r_0\ r_1\ r_2)$, $s = (s_0\ s_1\ s_2)$

$r \wedge s = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ (in coord. normali)

**DIM**: $X := \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^t P = 0$ e $X^t Q = 0$ $\Rightarrow P, Q \in \{y \mid x^t y = 0\} \Rightarrow$ ✓

analog. $X := \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \Rightarrow rX = 0$ e $sX = 0$

$\Rightarrow X \in r \wedge s \Rightarrow X = r \wedge s$ □

$A'' := (A \vee B') \wedge (A' \vee B) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b' \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ab' \\ -b' \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a'b \\ a' \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' \\ ab(a'-b') \\ a'b'(a-b) \end{pmatrix}$

Analog $B'' = \begin{pmatrix} bb' - cc' \\ bc(b'-c') \\ b'c'(b-c) \end{pmatrix}$ e $C'' = \begin{pmatrix} cc' - aa' \\ ca(c'-a') \\ c'a'(c-a) \end{pmatrix}$

CONTINUA $\frac{\text{cts}}{1}$

$A'', B'', C''$ sono allineati sse

$$\det\begin{pmatrix} aa'-bb' & bb'-cc' & cc'-aa' \\ ab(a'-b') & bc(b'-c') & ca(c'-a') \\ a'b'(a-b) & b'c'(b-c) & c'a'(c-a) \end{pmatrix} = 0$$

ciò si verifica ad esp. osservando che

$$cc'\begin{pmatrix} aa'-bb' \\ \vdots \\ \end{pmatrix} + aa'\begin{pmatrix} bb'-cc' \\ \vdots \\ \end{pmatrix} + bb'\begin{pmatrix} cc'-aa' \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Per l'"inoltre" si ha che

$r \wedge r' \in A'' \vee B'' \ (= B'' \vee C'' = C'' \vee A'')$ sse

$$\det\begin{pmatrix} 1 & aa'-bb' & bb'-cc' \\ 0 & ab(a'-b') & bc(b'-c') \\ 0 & a'b'(a-b) & b'c'(b-c) \end{pmatrix} = 0, \quad \text{sse}$$

$abb'c'(a'-b')(b-c) - a'b'bc(a-b)(b'-c') = 0$, sse

$a'b'c'(ab(b-c) - b'^2 \tfrac{ab}{b'} c'(b-c)) + a'b'c'\,bc(a-b) - a'b'^2 bc(a-b) = 0$, sse

$a'b'c'b(ab - bc) - b'^2 b(abc' - abc' + a'ca - a'bc) = 0$, sse

$\cancel{a'b'c'b(a-c) - b'^2 b}$ $\boxed{aba'c' - abb'c' + acb'c' - aca'b' + a'b'bc - a'c'bc = 0}$

$A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ concorrono sse $[(A \times A') \times (B \times B')] \cdot (C \times C') = 0$

sse $\begin{pmatrix} aa' \\ -a' \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} bb' \\ -b' \\ -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cc' \\ -c' \\ -c \end{pmatrix} = 0$ sse $\begin{pmatrix} a'b - ab' \\ ab(a'-b') \\ a'b'(b-a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cc' \\ -c' \\ -c \end{pmatrix} = 0$ sse

$$\boxed{bca'c' - acb'c' - aba'c' + abb'c' + a'b'ac - a'b'bc = 0}$$

$\square$



▶ **TRM** PROIETTIVITÀ TRA RETTE IMMERSE NEL PIANO

$r, r'$ rette distinte del piano; $\varphi: r \to r'$ proiettività $\Big\} \Rightarrow \varphi$ si scrive come composizione di AL PIÙ DUE proiezioni (da rette a rette, tramite opportuni centri)

<u>DIM</u>: ~~Per~~ Grazie al Trm di pappo

Si può scrivere $\varphi$, una volta fissato un $A \in r$, come proiezione da $r$ all'asse di collineazione di $\varphi$ $(\{(A \vee \varphi(B)) \wedge (B \vee \varphi(A)) : A, B \in r\})$ di centro $\varphi(A)$, seguita dalla proiezione dall'asse di collineazione a $r'$ di centro $A$. $\square$

<u>OSS</u> $\varphi: r \to r'$ proiettività $\Rightarrow$ "$\varphi$ proiezione sse $r \wedge r'$ è p.to unito per $\varphi$"

## ▶ Def TRIANGOLI PROSPETTIVI:

$A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{P}^n(K)$
$a := B \vee C$ e cicliche per $b$ e $c$
$a' := B' \vee C'$ e cicliche per $b'$ e $c'$
$\Rightarrow$ "$\hat{ABC}$ e $\hat{A'B'C'}$ sono PROSPETTIVI" $:=$ "$A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ concorrono in un p.to"

## ▶ Def TRIANGOLI OMOLOGICI

$A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{P}^n(K)$
$a, b, c, a', b', c'$ come sopra
$\Rightarrow$ "$\hat{ABC}$ e $\hat{A'B'C'}$ OMOLOGICI" $:=$ "$a \wedge a'$, $b \wedge b'$, $c \wedge c'$ sono allineati"

▶ OSS: Nel piano proiett. "essere prospettivi" e "essere omologici" sono nozioni duali.

## ▶ $\boxed{\text{TRM}}$ DI DESARGUES

$\hat{ABC}$ e $\hat{A'B'C'}$ PROSPETTIVI $\Longleftrightarrow$ $\hat{ABC}$ e $\hat{A'B'C'}$ OMOLOGICI (ciascuna da sola)

DIM: OSS: Sia la prospettività, sia l'omologicità implicano che $A, B, C, A', B', C'$ sono contenuti in un $\mathbb{P}^3(K)$. Dunque

($\Rightarrow$): S.d.r. $\{P_0, A, B, C, U\}$ con $P_0 = (A \vee A') \wedge (B \vee B') \wedge (C \vee C')$.

$A = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix}1\\a\\0\\0\end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix}1\\0\\b\\0\end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\c\end{pmatrix}$

$a: x_0 = 0 = x_1$; $\quad b: x_0 = 0 = x_2$; $\quad c: x_0 = 0 = x_3$

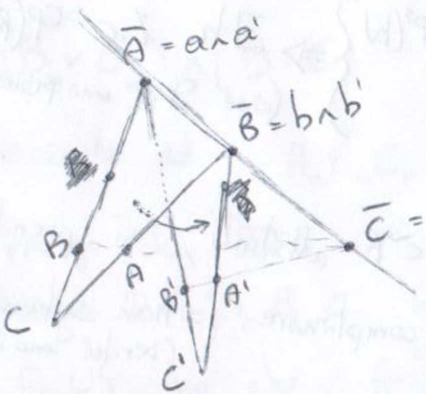
$a': x_1 = 0 = bc x_0 - c x_2 - b x_3$; $\quad b': x_2 = 0 = ac x_0 - c x_1 - a x_3$; $\quad c': x_3 = 0 = ab x_0 - b x_1 - a x_2$

$\Rightarrow a \wedge a' = \begin{pmatrix}0\\0\\b\\-c\end{pmatrix}$; $b \wedge b' = \begin{pmatrix}0\\a\\0\\-c\end{pmatrix}$; $c \wedge c' = \begin{pmatrix}0\\a\\b\\0\end{pmatrix}$ che sono lin. dipendenti ✓

CONTINUA ⇨



($\Leftarrow$) reminder: OMOLOGHI $\Rightarrow$ IN $\mathbb{P}^3$. [redacted] Ora guarda isto disegno:




con una rotaz. intorno all'asse $\bar{A} \vee \bar{B}$ si può portare il piano di $\hat{ABC}$ a coincidere con quello di $\hat{A'B'C'}$

[redacted]

S.d.r.: $\{A, \bar{B}, \bar{C}, A'\}$, si ha dunque

$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\0\\b\\0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1\\c\\0\\0\end{pmatrix}$,

$B \in A \vee \bar{C}$ (perché $\bar{C} \in B \vee A$ per def.) $\quad C \in A \vee \bar{B}$

$A' = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix}0\\0\\b'\\1\end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix}0\\c'\\0\\1\end{pmatrix}$

$\dim_S((B \vee C) \vee (B' \vee C')) = \underbrace{\dim_S(B \vee C)}_{=1} + \underbrace{\dim_S(B' \vee C')}_{=1} - \underbrace{\dim_S((B \vee C) \wedge (B' \vee C'))}_{=0} = 2$

$B, C, B', C'$ sono complanari
$\Longrightarrow \det(B\,C\,B'\,C') = 0 \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&c&c'\\b&b'&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} = -cb' + c'b = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$

$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix}b & b'\\ c & c'\end{pmatrix} = 0$

$A \vee A': x_1 = 0 = x_2$
$B \vee B': x_1 = 0 = -b x_0 + x_2 - b' x_3$
$C \vee C': x_2 = 0 = -c x_0 + x_1 - c' x_3$
$\Rightarrow (A \vee A') \wedge (B \vee B') = \begin{pmatrix}b'\\0\\0\\-b\end{pmatrix} \in C \vee C'$

perché $x_2 = 0$ e $-cx_0 + x_1 - c'x_3 = -cb' + c'b = 0$ ✓ □

## ▶ PROIETTIVITÀ TRA RETTE SGHEMBE IN $\mathbb{P}^3(K)$

$\left.\begin{array}{l} r, r' \text{ rette sghembe in } \mathbb{P}^3(K) \\ \varphi: r \to r' \text{ proiettività} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists h$ t.c. $\varphi(R) = (R \vee h) \wedge r'$
(cioè $\varphi$ è una proiez. di centro $h$)

**DIM:** presi $A, B, C \in r$ distinti, si prende $h$ t.c. $h$ sia complanare (= non sghemba) con (perché sono in $\mathbb{P}^3$)

$A \vee \varphi(A)$, $B \vee \varphi(B)$ e con $C \vee \varphi(C)$.

Infatti presa una tale $h$, poiché ~~verifica~~ la proiez. $\pi_h$ da $r$ a $r'$ tramite $h$ verifica

$\pi_h(A) = \varphi(A)$, $\pi_h(B) = \varphi(B)$ e $\pi_h(C) = \varphi(C)$,

che sono 3 punti in posiz. generale, allora verifica

$\pi_h(P) = \varphi(P)$ $\forall P \in r$. □

**OSS:** $h$ non è unica! Infatti $A \vee \varphi(A)$, $B \vee \varphi(B)$ e $C \vee \varphi(C)$ sono 3 rette a 2 a 2 sghembe, e l'insieme unione ~~di tutte rette~~ di tutte le rette che sono incidenti a tutte e 3 è proprio quello discusso nell'esz. ~~...~~ classico a p. 7 di queste note.



**ESZ. per l'immaginazione:**

in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dato $\hat{ABC}$ triangolo, siano $A_1 \in B \vee C$, $B_1 \in C \vee A$, $C_1 \in A \vee B$

$A_{n+1} := (B_n \vee C_n) \wedge (B \vee C)$ e cicliche per $B_{n+1}$ e $C_{n+1}$.

Cosa succede ad $A_n \hat{B}_n C_n$?

**SOL:** Suppongo che $A_1, B_1, C_1$ non siano coincidenti con alcuno tra $A, B, C$. Allora, preso l'sd.r. $\{A, B, C, U\}$, ho che $A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$A_1 = \begin{pmatrix}0\\a\\a'\end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix}b\\0\\b'\end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix}c\\c'\\0\end{pmatrix}$. con $a, a', b, b', c, c' \neq 0$
perché non sono su alcun vertice

$\Rightarrow A_2 = (B \times C) \times (B_1 \times C_1) = \dots = \begin{pmatrix}0\\-bc'\\b'c\end{pmatrix}$

$B_2 = \dots = \begin{pmatrix}ca'\\0\\-c'a'\end{pmatrix}$, $C_2 = \dots = \begin{pmatrix}-ba'\\a b'\\0\end{pmatrix}$

e nessuno tra $A_2, B_2, C_2$ coincide con un vertice di $\hat{ABC}$. Per induzione se nessuno tra $A_1, B_1, C_1$ è su un vertice, allora nessuno tra $A_n, B_n, C_n$ è su un vertice. Posso dunque sempre assumere che una delle due coord. non nulle (WLOG la seconda non nulla) sia 1. Ho insomma

$A_1 = \begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix}b\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix}c\\1\\0\end{pmatrix}$ e la ricorsione

$A_n = \begin{pmatrix}0\\a_n\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-b_{n-1}\\c_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-b_{n-1}/c_{n-1}\\1\end{pmatrix}$

$B_n = \dots = \begin{pmatrix}a_{n-1}c_{n-1}\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_n = \dots = \begin{pmatrix}-b_{n-1}/a_{n-1}\\1\\0\end{pmatrix}$

ovvero ...

**NOTA:** Non ho studiato 2 CASI:
1) $A_1, B_1, C_1$ sono (almeno uno) su un vertice di $\hat{ABC}$
2) $|\pi_0| = |\pi_1|$
Non penso siano difficili e li ometto.

36

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{b_n}{c_n} \\ b_{n+1} = -a_n c_n \\ c_{n+1} = -\dfrac{b_n}{a_n} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+2} = -\dfrac{a_n^2 c_n}{b_n} \\ b_{n+2} = -\dfrac{b_n^2}{a_n c_n} \\ c_{n+2} = -\dfrac{a_n c_n^2}{b_n} \end{cases}$$

RESOCONTO: $B_{2n}$ tende a un vertice tra A e C, e $B_{2n+1}$ tende all'altro. Insomma $B_n$ "oscilla asintoticamente" tra A e C. Analog. (cambian le assunzioni su ~~...~~ chi tra a, a' è =1 ad es.) $A_n$ "oscilla asint." tra B e C e $C_n$ "oscilla as." tra A e B.

OSS1: $a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} = -b_n^2$

OSS2: $a_{n+2} b_{n+2} c_{n+2} = -a_n^2 c_n^2$

$\pi_n := a_n b_n c_n$ allora $\boxed{\text{OSS3: } \pi_{n+1} \pi_{n+2} = \pi_n^2}$

VOGLIO STUDIARE $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e di conseguenza $(-b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$

$\pi_{n+2} = \dfrac{\pi_n^2}{\pi_{n+1}}$

$\pi_0, \quad \pi_1, \quad \dfrac{\pi_0^2}{\pi_1}, \quad \dfrac{\pi_1^3}{\pi_0^2}, \quad \dfrac{\pi_0^6}{\pi_1^5}, \quad \dfrac{\pi_1^{11}}{\pi_0^{10}}, \ldots$

OSS4: $\dfrac{\pi_0^{x+1}}{\pi_1^x}, \quad \dfrac{\pi_1^{y+1}}{\pi_0^y} \longrightarrow \dfrac{\pi_0^{2x+y+2}}{\pi_1^{2x+y+1}}$

idem scambiando $\pi_0$ e $\pi_1$

$\Rightarrow$ L'esponente del numeratore sarà sempre uguale a "esp. del denom. + 1"

OSS5: è facile vedere che gli esponenti $\to \infty$ sia per il num. che per il denom.

$\Longrightarrow$ ~~...~~ $\pi_{2n} = \dfrac{\pi_0^{e_{2n}+1}}{\pi_1^{e_{2n}}}, \quad \pi_{2n+1} = \dfrac{\pi_1^{e_{2n+1}+1}}{\pi_0^{e_{2n+1}}}$

(RIASSUMENDO) con $e_n \longrightarrow \infty$

OSS DISEGNATI CONFIRMED

$\Longrightarrow \begin{cases} \pi_{2n} = \pi_0 \left(\dfrac{\pi_0}{\pi_1}\right)^{e_{2n}} \\ \pi_{2n+1} = \pi_1 \left(\dfrac{\pi_1}{\pi_0}\right)^{e_{2n+1}} \end{cases} \Longrightarrow$ a seconda che $|\pi_1| > |\pi_0|$ o $|\pi_1| < |\pi_0|$ ho che:

(oss: il caso $\pi_1 = \pi_0$ sarebbe da fare a parte)

$|\pi_1| > |\pi_0| \Rightarrow \pi_{2n} \to 0$ e $|\pi_{2n+1}| \to \infty \Rightarrow B_{2n} \to C$ e $B_{2n+1} \to A$

$|\pi_1| < |\pi_0| \Rightarrow |\pi_{2n}| \to \infty$ e $\pi_{2n+1} \to 0 \Rightarrow B_{2n} \to A$ e $B_{2n+1} \to C$

IN OGNI CASO ALTERNA DA A a C "□"

36

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{b_n}{c_n} \\ b_{n+1} = -a_n c_n \\ c_{n+1} = -\dfrac{b_n}{a_n} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+2} = -\dfrac{a_n^2 c_n}{b_n} \\ b_{n+2} = -\dfrac{b_n^2}{a_n c_n} \\ c_{n+2} = -\dfrac{a_n c_n^2}{b_n} \end{cases}$$

RESOCONTO: $B_{2n}$ tende a un vertice tra A e C, e $B_{2n+1}$ tende all'altro. Insomma $B_n$ "oscilla asintoticamente" tra A e C. Analog. (cambian le assunzioni su ~~a,c~~ chi tra a,c è =1 ad esp.) $A_n$ "oscilla asint." tra B e C e $C_n$ "oscilla as." tra A e B.

**OSS1**: $a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} = -b_n^2$

**OSS2**: $a_{n+2} b_{n+2} c_{n+2} = -a_n^2 c_n^2$

$\pi_n := a_n b_n c_n$ allora $\boxed{\text{OSS3: } \pi_{n+1}\pi_{n+2} = \pi_n^2}$

VOGLIO STUDIARE $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e di conseguenza $(-b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$

$\pi_{n+2} = \frac{\pi_n^2}{\pi_{n+1}}$

$\pi_0, \quad \pi_1, \quad \frac{\pi_0^2}{\pi_1}, \quad \frac{\pi_1^3}{\pi_0^2}, \quad \frac{\pi_0^6}{\pi_1^5}, \quad \frac{\pi_1^{11}}{\pi_0^{10}}, \dots$

**OSS4**: $\frac{\pi_0^{x+1}}{\pi_1^x}, \quad \frac{\pi_1^{y+1}}{\pi_0^y} \longrightarrow \frac{\pi_0^{2x+y+2}}{\pi_1^{2x+y+1}}$

idem scambiando $\pi_0$ e $\pi_1$

$\Rightarrow$ L'esponente del numeratore sarà sempre uguale a "esp. del denom. + 1"

**OSS5**: è facile vedere che gli esponenti $\to \infty$ sia per il num. che per il denom.

$\Longrightarrow$ (RIASSUMENDO) $\pi_{2n} = \frac{\pi_0^{e_{2n}+1}}{\pi_1^{e_{2n}}}$, $\quad \pi_{2n+1} = \frac{\pi_1^{e_{2n+1}+1}}{\pi_0^{e_{2n+1}}}$ con $e_n \to \infty$

OSS DISEGNATI CONFIRMED

$$\Longrightarrow \begin{cases} \pi_{2n} = \pi_0 \left(\frac{\pi_0}{\pi_1}\right)^{e_{2n}} \\ \pi_{2n+1} = \pi_1 \left(\frac{\pi_1}{\pi_0}\right)^{e_{2n+1}} \end{cases} \Longrightarrow$$ a seconda che $|\pi_1| > |\pi_0|$ o $|\pi_1| < |\pi_0|$ ho che:

(OSS: il caso $\pi_1 = \pi_0$ sarebbe da fare a parte)

$|\pi_1| > |\pi_0| \Rightarrow \pi_{2n} \to 0$ e $|\pi_{2n+1}| \to \infty \Rightarrow B_{2n} \to C$ e $B_{2n+1} \to A$

$|\pi_1| < |\pi_0| \Rightarrow |\pi_{2n}| \to \infty$ e $\pi_{2n+1} \to 0 \Rightarrow B_{2n} \to A$ e $B_{2n+1} \to C$

IN OGNI CASO ALTERNA DA A a C "□"