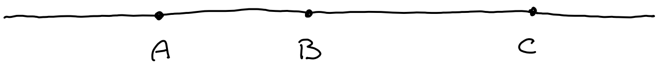
Geo 1 - mod B - 17/05/2023

Note Title

$\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$



rapporto semplice

$\lambda := (A\,B\,C) = \dfrac{C-A}{B-A} \in \mathbb{K}$

λ è la coordinata di C nel s.d.r. affine $\{A, B\} = \{A, \underset{\uparrow \text{vettore}}{B-A}\}$

$C = A + x(B-A)$ $\quad C - A = x(B-A)$ ossia $x = (A\,B\,C)$

<u>Birapporto</u>

4 punti in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ (A, B, C distinti)

$$\mathbb{K}\cup\{\infty\} \ni \lambda = (A\,B\,C\,D) = \frac{(B\,C\,D)}{(A\,C\,D)} = \frac{D-B}{C-B} \cdot \frac{1}{\frac{D-A}{C-A}} = \frac{(D-B)(C-A)}{(D-A)(C-B)}$$

ritrovo la definizione usata ieri

Ricordo che λ è stata definita ieri come:

quoziente $\dfrac{x_0}{x_1}$ ove $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ sono le coord di D nel s.d. riferimento proiettivo $A\ B\ C$ di $\mathbb{P}^1$

$D \rightsquigarrow = \langle v_D \rangle$

...

$A = \langle v_A \rangle \quad B = \langle v_B \rangle \quad C = \langle v_C \rangle \quad v_C = v_A + v_B$

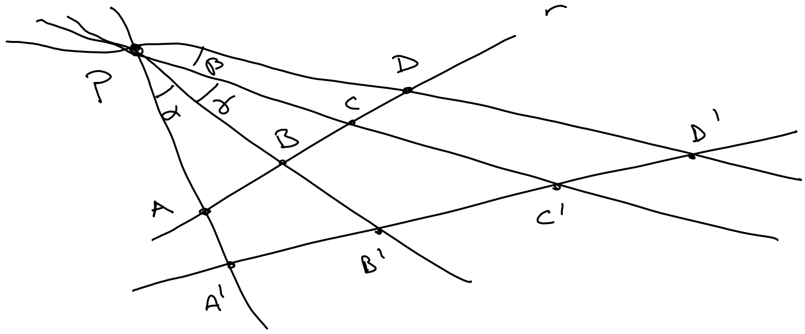
$v_D = x_0 v_A + x_1 v_B \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ sono le coordinate cercate

Si calcola facilmente $\boxed{(\infty\ \ 0\ \ 1\ \ \lambda) = \lambda}$

$$\text{``}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right) = \lambda$$

$$\text{``}\ \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-\lambda)\cdot 1}{1 \cdot (-1)} = \lambda$$

$(0\ \ \infty\ \ 1\ \ \lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$

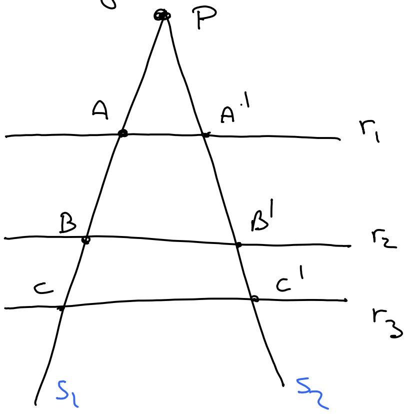


$\mathbb{P}^2$

$$(A\ B\ C\ D) = \frac{\sin\alpha \,\sin\beta}{\sin(\alpha+\gamma)\,\sin(\beta+\gamma)}$$

$$(A'\ B'\ C'\ D') =$$

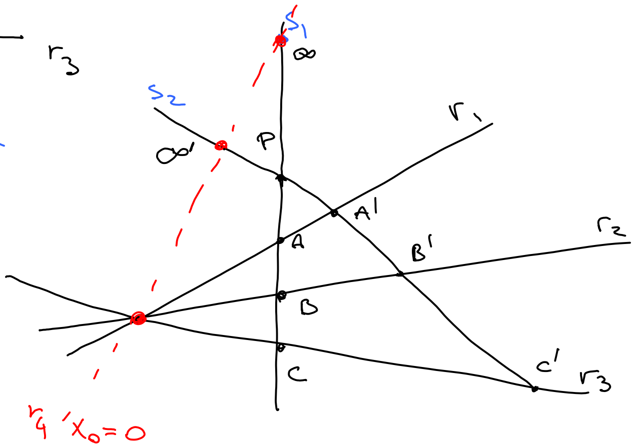
È legato al teorema di Talete



Talete dice che $(ABC) = (A'B'C')$

$$\frac{C-A}{B-A} = \frac{C'-A'}{B'-A'}$$

Proiettivo



$$(A\ B\ C\ \infty) = (A'\ B'\ C'\ \infty)$$

questo è vero per quanto visto ieri (birapporto non dipende dalla trasversale scelta alle 4 rette $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$.)

Importante è il caso in cui $(A\ B\ C\ D) = -1$

Si dice che D è il 4° armonico di A B C oppure anche che C D separa armonicamente A B

Calcoliamolo in certi casi:

$\mathbb{P}^1_K$ $\quad \begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$? $\qquad a \neq b$

$$(A\ B\ \infty\ D) = -1 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & b\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{vmatrix}} = \frac{(b-x)(-1)}{(a-x)(-1)} = \frac{x-b}{x-a}$$

$$x - b = -(x-a) \implies 2x = a+b \qquad x = \frac{a+b}{2}$$

Conclusione il 4° armonico di A, B, ∞ è il punto medio di AB

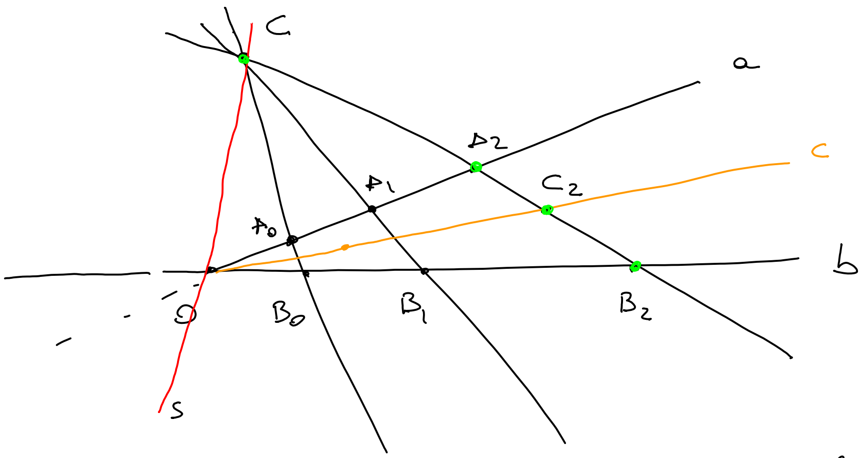
$\left(A\ B, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix} \right) = -1$?

Esercizio: $x = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$

Esercizio 3 del 9/9/2022

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ siano date a, b, rette e sia $O = a \wedge b$. Sia $C \notin a \cup b$

Prese tre rette qualsiasi per C



Sia $i \neq j$, $i, j \leq 2$

$P_{ij} = (A_i \vee B_j) \wedge (A_j \vee B_i)$

sono tutti allineati e appartengono ad una retta per O detta c

(già visto la settimana scorsa)

Mostrare che $(a, b, \overset{O \vee C}{\overset{\|}{s}}, c) = -1$

Def Siano $t_1, \dots t_4$ rette in $\mathbb{P}^2$ concorrenti

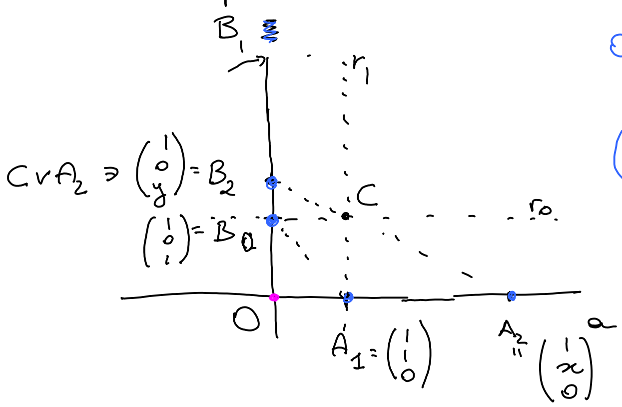
$(t_1, t_2, t_3, t_4) = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ con T_i i corrispondenti punti nel piano proiettivo duale

NB t_i concorrenti $\Rightarrow$ T_i allineati

Si può definire anche come $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{S}, \tilde{C})$ $\hookrightarrow$ 4 punti individuati da a, b, s, c su una trasversale comune

ad es. $(A_2\ B_2\ C\ C_2)$.

Idea per la dimostrazione: scegliere un s. d. rif "bello"



$O = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ a: $x_2 = 0$

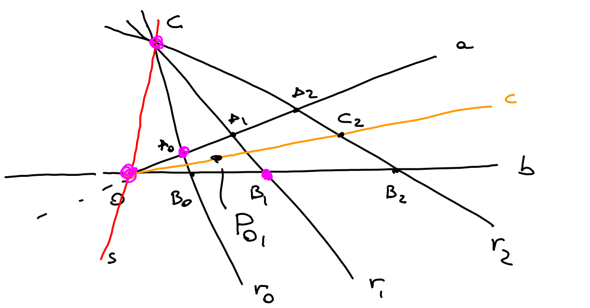
b: $x_1 = 0$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = A_0$

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = B_1$

$C = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

A_0:



a è asse delle x $\rightsquigarrow$ $y=0$ nell'affine $\rightsquigarrow$ $x_2=0$ nel proiett
$y = \frac{x_2}{x_0}$

$\rightsquigarrow$ $(0\ 0\ 1)$ coord pl. di a

$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ $\rightsquigarrow$ $(a_0\ a_1\ a_2)$

È il p.to corrisp. in $\mathbb{P}^{2*}$ è $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b è asse delle y $\rightsquigarrow$ $x=0$ nell'affine $\rightsquigarrow$ $x_1=0$ nel proiett

$\rightsquigarrow$ $(0\ 1\ 0)$ $\rightsquigarrow$ p.to $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{2*}$

$s:\ O \vee C$ $\quad x-y=0$ nell'affine $\quad x_1 - x_2 = 0$ nel proiett.

$\rightsquigarrow$ $(0\ 1\ -1)$ $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{2*}$

$c:\ O \vee P_{01}$ $\quad P_{01} = (A_0 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_0) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

p.to all'infinito di $x+y=0$

$c:\ x_1 + x_2 = 0$ $\rightsquigarrow$ $(0\ 1\ 1)$ $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{2*}$

$(a, b, s, c) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$ $\quad$ NB i 4 p.ti in $\mathbb{P}^{2*}$ sono allineati

calcolo e trovo -1

in alternativa: $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underset{x_0}{(-1)}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \underset{x_1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{x_0}{x_1} = -1$

<u>Esercizio</u> $\quad r^a$ (affine): $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \{x_0 = 0\}$

$s^a:\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad t^a:\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

Considero le corrispondenti rette proiettive:

$r:\ \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = U_r$ $\qquad r^a:\ \begin{cases} y=-1 \\ x-z=0 \end{cases}$ $\qquad r:\ \begin{cases} x_0+x_2=0 \\ x_1-x_3=0 \end{cases}$

$s \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = U_s$ $\qquad s^a:\ \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$ $\qquad s:\ \begin{cases} x_0-x_2=0 \\ x_0-x_3=0 \end{cases}$

$t \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = U_t$ $\qquad T = \begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\\\alpha\\\alpha+\beta\end{pmatrix} \in t$ generico

← a meno di proporz. (α,β) e $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$ danno T; $\lambda \neq 0$

• determinare le posizioni reciproche di r, s, t

2 possibilità : – incidenti $\iff$ intersez. dei sottosp. in $\mathbb{R}^4$ è $\neq \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

– sghembe $\iff$ . . . . è $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$r \wedge s$ $\qquad U_r \cap U_s \neq 0 \iff$ i 4 vettori sono l. dip.

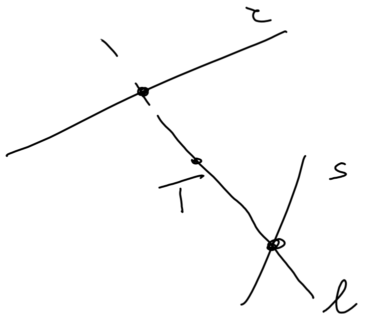
$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si verifica che è $\neq 0 \Rightarrow U_r \cap U_s = 0 \Rightarrow r$ e s sghembe

• $t \wedge r = \emptyset$ $\qquad$ r è sghemba con s e t.

• $t \wedge s$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3$ $\qquad$ s e t sono incidenti.

• Preso un punto $T \in t$ con $T \notin r \cup s$ $(T \notin r$ e $T \notin s)$ determinare la retta per T e intersecante r ed s.



$\ell : (r \vee T) \wedge (s \vee T)$ retta in $\mathbb{P}^3$

$\ell \wedge r = R \qquad \ell \wedge s = S$

R ed S esistono sempre nel proiettivo

$T = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \alpha \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}$ $\qquad r \vee T \doteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \alpha \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$

$= W_r$

$\boxed{\beta \neq 0}$

$T \notin s \cup r$ $\qquad s \vee T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \alpha \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$

$= W_s$

eq. cartes. di W_r $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha & x_0 \\ 1 & 1 & -\beta & x_1 \\ -1 & 0 & \alpha & x_2 \\ 1 & 1 & \alpha+\beta & x_3 \end{vmatrix} = 0$

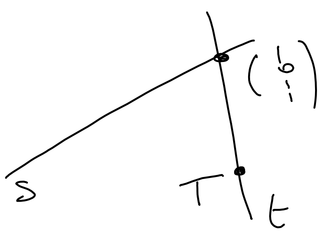
$r \vee T$: $(\alpha+2\beta)x_0 + 2\alpha x_1 + (\alpha+2\beta)x_2 - 2\alpha x_3 = 0$

Analogamente

$s \vee T$ $\qquad \cancel{\beta}(x_0 - x_2) = 0$

$\parallel$

$s \vee t$



Calcolare $\underbrace{l}_{\text{dipende da } T}$: $\begin{cases} (\alpha+2\beta)x_0 + 2\alpha x_1 + (\alpha+2\beta)x_2 - 2\alpha x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$

$R = r \cap l$ $\qquad$ $S = s \cap l$ $\qquad$ Fare i calcoli!

$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in x_0 = 0$ $\qquad$ $S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\beta/\alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pertanto se avessi risolto il problema nell'affine avrei sempre trovato $l^a \parallel r^a$

$$r \cap l : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ (\alpha+2\beta)x_0 + 2\alpha x_1 + (\alpha+2\beta)x_2 - 2\alpha x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = x_3 \\ \cancel{\alpha x_1 = \alpha x_3} \\ x_2 = 0 \end{cases} \Big\} \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \rightsquigarrow \text{pto in } \mathbb{P}^3$$