Università degli studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

IL CORPO DEI QUATERNIONI E IL LORO USO NELLA RAPPRESENTAZIONE DELLE ROTAZIONI DI $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

Questo file contiene un recap essenziale sui quaternioni. Descrive il percorso che credo sia il più veloce verso la rappresentazione delle rotazioni tramite di essi. È circa una riscrittura di quanto sta nell'AGLQ (alle pagine 216 e 217), dove potete di fatto ritrovare le stesse cose. Qui sono solamente isolate in un file dedicato e un po' allargate per sottolineare i fatti importanti.

Alessandro Vici

Academic year 2022/2023

Contents

1 Il corpo dei quaternioni e il loro uso nella rappresentazione delle rotazioni di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

1.1 Definizione dell'insieme dei quaternioni

Definiamo l'insieme $\mathbb{H}$ dei quaternioni come spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali:

$$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

dove somma di vettori e prodotto per scalari funzionano nel modo ovvio:

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

$$\lambda\big(a + bi + cj + dk\big) = (\lambda a) + (\lambda b)i + (\lambda c)j + (\lambda d)k \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.2 Una base ovvia per lo spazio dei quaternioni

È evidente dalla definizione che una base per lo spazio dei quaternioni è data da $\{1, i, j, k\}$ [(1)]. Nel seguito si vedrà il ruolo di questa base. Intanto sottolineiamo che

- 1 sarà l'unità moltiplicativa anche per lo spazio dei quaternioni (nel senso che diciamo tra un attimo),
- I tre quaternioni i, j, k si chiameranno *unità immaginarie*.

1.3 Definizione del prodotto

La definizione dello spazio dei quaternioni, che di per sé finora è identico (o meglio isomorfo in modo ovvio) con $\mathbb{R}^4$, ha senso perché ciò che ci interessa ora è introdurre una operazione di prodotto tra i quaternioni.
L'operazione in questione si definisce definendo l'operazione di prodotto tra gli elementi della base naturale $\{1, i, j, k\}$, cioè

$$1 \cdot (a + bi + cj + dk) = a + bi + cj + dk \quad \forall a + bi + cj + dk \in \mathbb{H},$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

[1] È chiaro che con $1, i, j, k$ si intendono rispettivamente i quaternioni $(1+0i+0j+0k), (0+i+0j+0k), (0+0i+j+0k), (0+0i+0j+k)$. Nel seguito, ogni volta che un coefficiente all'interno di un quaternione sarà nullo, semplicemente ometteremo di scrivere nella somma la sua unità immaginaria corrispondente (come si fa anche con i complessi). Se saranno tutti nulli scriveremo il quaternione semplicemente come 0.

$$
\begin{aligned}
ij = k, \quad & jk = i, \quad & ki = j \\
ji = -k, \quad & kj = -i, \quad & ik = -j
\end{aligned}
$$

E estendendo tale prodotto a tutti i quaternioni definendolo distributivo rispetto alla somma.
Osservazione: il prodotto così definito è anche associativo. Ciò non sarebbe vero se non si fosse fatta distinzione tra i prodotti misti ij e ji, jk e kj, ki e ik.
In definitiva, il prodotto scritto per esteso avrà questa forma:

$$
\begin{aligned}
(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \; & (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) \\
& +(a_0 b_1 + b_0 a_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i \\
& +(a_0 b_2 + b_0 a_2 - a_1 b_3 + a_3 b_1) j \\
& +(a_0 b_3 + b_0 a_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k
\end{aligned} \tag{1}
$$

Una osservazione immediata ma importante da fare è che il prodotto **non** è commutativo.

1.4 Rappresentazione "vettoriale" dei quaternioni e del loro prodotto

Una notazione conveniente ai fini dei conti è scrivere un quaternione $z = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ come

$$
z = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad \text{dove si intende } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.
$$

La comodità di questa notazione è che è possibile riscrivere il prodotto tra quaternioni in questo modo:

$$
z = \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, z' = \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \Rightarrow zz' = \begin{pmatrix} a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{pmatrix}.
$$

Questo fatto si dimostra a conti. Scrivete per esteso il prodotto di due generici quaternioni e verificate in due righe che funziona.

1.5 Coniugio

Il coniugio si definisce in modo analogo al coniugio dei numeri complessi: il coniugato di un quaternione $z = a + bi + cj + dk$ è il quaternione

$$
\overline{z} = a - bi - cj - dk,
$$

ovvero il quaternione con i coefficienti delle unità immaginarie di segno opposto.
Il coniugio verifica, per ogni coppia di quaternioni z_1, z_2, l'identità

$$
\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_2}\,\overline{z_1}. \tag{2}
$$

(che si può verificare velocemente per conto diretto.)

1.6 Norma

La norma dello spazio dei quaternioni è la stessa di $\mathbb{R}^4$, solo che si può definire anche tramite il coniugio, come è anche per i numeri complessi: per un generico quaternione $z = a+bi+cj+dk$ definiamo

$$\begin{aligned} ||z|| \;:=& \sqrt{z\overline{z}} \\ =& \sqrt{(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk)} \\ =& \;...due\ conti... \\ =& \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{aligned}$$

Fatto: Vale anche per i quaternioni che la norma di un prodotto è il prodotto delle norme, ovvero che per ogni $z, z' \in \mathbb{H}$ si ha

$$||zz'|| = ||z||\,||z'||.$$

Questo fatto si dimostra con un po' di conti. Scrivete la formulozza (1) per il prodotto tra due generici quaternioni, scrivete la somma dei quadrati dei coefficienti e la svolgete. Vedrete che tutti i doppi prodotti si cancellano e rimangono solo i 16 quadrati. I quadrati poi si possono raccogliere nel prodotto delle due singole norme al quadrato, come si vuole.

1.7 Identificazione di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con un opportuno sottospazio dei quaternioni

L'interesse primario dei quaternioni sta in un metodo di rappresentazione alternativo delle rotazioni intorno a un asse in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$. È dunque necessario creare una biezione tra $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ stesso e un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{H}$. Tale sottoinsieme è molto semplice ed è dato da

$$\overline{\mathbb{H}} := \big\{a+bi+cj+dk \in \mathbb{H} : \; a = 0\big\}.$$

È immediato vedere che questo sottoinsieme è un sottospazio di dimensione 3 (essendo chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare) e anche che invece **non** è chiuso rispetto al prodotto (cosa che però non ci darà problemi.

È altrettanto evidente che $\overline{H}$ è in biezione con $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ tramite l'isomorfismo ovvio:

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{E}^3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{H}} \\ & v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} & \mapsto & v_1 i + v_2 j + v_3 k \end{array}$$

(dove si sottintende naturalmente che in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si è fissato un sistema di riferimeno e che le coordinate si riferiscono a quello.)

1.8 I quaternioni di norma 1

L'insieme dei quaternioni di norma 1 lo denoteremo con $\mathbb{H}^1$. Osserviamo che **non** è un sottospazio (perché non è chiuso rispetto alla somma) ma che è un sottogruppo di $\mathbb{H}$ rispetto al prodotto tra quaternioni (è ovvio per la proprietà della norma rispetto al prodotto, cioè che la norma di un prodotto è il prodotto delle norme).

Inoltre, visto che per definizione un quaternione $z = \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$ ha norma unitaria se e solo se $|a_0|^2 + ||\mathbf{a}||^2_{\mathbb{E}^3(\mathbb{R})} = 1$, si può dire che

$$z \in \mathbb{H}^1 \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\mathbf{u} \end{pmatrix}, \ \exists \theta \in [0, 2\pi), \ \exists \mathbf{u} \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ ||x|| = 1\}.$$

1.9 Descrivere le rotazioni tramite i quaternioni di norma 1

Si consideri un sistema di riferimento ortonormale $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$.

Si consideri, per ogni $z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^1$, la mappa

$$\begin{array}{rccc} \rho_z : & \overline{\mathbb{H}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{H}} \\ & x & \mapsto & zx\overline{z} \end{array}.$$

Tale mappa, tramite l'identificazione di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con $\overline{\mathbb{H}}$, equivale a una rotazione di angolo 2θ intorno all'asse $O + \langle \mathbf{u} \rangle$ (nel senso indicato dal verso di $\mathbf{u}$ con la regola della mano destra).

Dimostrazione:

Si ha che, se $z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\mathbf{u} \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$, allora

$$\begin{aligned} zx\overline{z} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\mathbf{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\mathbf{u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} \\ \cos(\theta)\mathbf{x} + \sin(\theta)\mathbf{u}\times\mathbf{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\mathbf{u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\cos(\theta)\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} \ + \ \cos(\theta)\sin(\theta)\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} \ + \ \sin^2(\theta)(\mathbf{u}\times\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} \\ \sin^2(\theta)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{u} + \cos^2(\theta)\mathbf{x} + \sin(\theta)\cos(\theta)\mathbf{u}\times\mathbf{x} - \cos(\theta)\sin(\theta)\mathbf{x}\times\mathbf{u} - \sin^2(\theta)(\mathbf{u}\times\mathbf{x})\times\mathbf{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'ultima espressione trovata, usando anche l'identità (valida per ogni terna di vettori in $\mathbb{R}^3$)

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}),$$

si può riscrivere come

$$
\begin{aligned}
zx\overline{z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\mathbf{x} \;+\; 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathbf{u}\times\mathbf{x} \;+\; 2\sin^2(\theta)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{u} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\theta)\mathbf{x} \;+\; \sin(2\theta)\,\mathbf{u}\times\mathbf{x} \;+\; 2\sin^2(\theta)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{u} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e ora nell'ultima espressione si riconosce bene la rotazione cercata[(2)].

$\square$

1.10 Prodotto di quaternioni e composizione di rotazioni con asse per l'origine

Il risultato dimostrato sopra è l'unica parte non immediata di tutto il nostro discorso. Ora possiamo effettivamente apprezzare la potenza dei quaternioni nello studio di rotazioni. Siano date due rotazioni ρ_1 e ρ_2 di angoli θ_1 e θ_2 intorno agli assi $r_1 = O + \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ e $r_2 = O + \langle \mathbf{u}_2 \rangle$ (entrambi passanti per l'origine)(supponiamo di aver già preso $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ di norma unitaria). Siano $z_1 := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1)\mathbf{u}_1 \end{pmatrix}$ e $z_2 := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2)\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$. La composizione $\rho_2 \circ \rho_1$, vista tramite l'identificazione di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con $\overline{\mathbb{H}}$ e tramite i quaternioni, agisce nel seguente modo:

$$
\begin{array}{ccccc}
\overline{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\rho_1} & \overline{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\rho_2} & \overline{\mathbb{H}} \\
x & \mapsto & z_1\, x\, \overline{z_1} & \mapsto & z_2\, z_1\, x\, \overline{z_1}\, \overline{z_2}
\end{array}
$$

Ma ricordiamo dall'identità (2) a pagina 3 che tale azione equivale alla mappa

$$x \mapsto (z_2 z_1) x \overline{(z_1 z_2)},$$

che quindi è a sua volta una rotazione! Fin qui in realtà nulla di speciale, perché con due considerazioni sul segno del determinante e sui punti fissi avremmo dedotto ugualmente e in fretta che si trattava di una rotazione. Il bello però sta nel fatto che basta calcolare il prodotto $z_1 z_2$ (che è molto facile una volta dati z_1 e z_2) per dedurre in un attimo anche angolo e asse della nuova rotazione $\rho_2 \circ \rho_1$ (!).

[2]Non proprio a occhio magari, ma se scomponete $\mathbf{x}$ come somma della sua componente $\mathbf{x}_{||}$ parallela a $\mathbf{u}$ con la sua componente $\mathbf{x}_{\perp}$ ortogonale a $\mathbf{u}$ e sfruttate la distributività del prodotto vettoriale rispetto alla somma penso che non dobbiate faticare troppo a vederlo.

1.11 Usare i quaternioni per descrivere una rotazione con asse non passante per l'origine

Vi lascio questa parte per esercizio:

1. Come si possono sfruttare le traslazioni per riscrivere una generica rotazione data (quindi con angolo e asse dati, ma con l'asse che non necessariamente passa per l'origine) in termini solo di traslazioni e di una rotazione con asse passante per l'origine?

2. A questo punto come si può scrivere tramite quaternioni una rotazione generica di cui sia dato l'angolo θ e l'asse $P + \langle \mathbf{u} \rangle$?

Come suggerimento vi faccio osservare il fatto (in realtà abbastanza ovvio) che anche una qualsiasi traslazione $\tau_{\mathbf{v}}$ di vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ fissato è rappresentabile tramite quaternioni, semplicemente definendo il quaternione $q := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ e scrivendo la traslazione con la solita identificazione come

$$\begin{array}{rccc} \tau_{\mathbf{v}} : & \overline{\mathbb{H}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{H}} \\ & x & \mapsto & x + q \end{array} .$$

Osservazione bonus, per quando avrete trovato l'espressione per la rotazione generica: l'espressione individuata si può di fatto riscrivere come composizione di una singola traslazione dopo la rotazione. Il vettore di traslazione che trovate, che dovrebbe avere una forma in quaternioni del tipo $q - zq\overline{z}$, se ci fate caso è ortogonale all'asse di rotazione (ragionate di nuovo per componenti parallela e ortogonale per vederlo, o disegnatelo se vi riesce). Questa cosa, che di fatto vi esce dai conti, è in effetti giusta, altrimenti avreste anche una componente di traslazione parallela all'asse, e se vi ricordate tale componente fa sì che la composizione non sia una rotazione pura ma una glissorotazione.

1.12 Composizione di due generiche rotazioni

Su questa parte non so nemmeno io come funzioni completamente. Non conosco risultati noti né mi sono mai usciti conti belli sul punto "1.". Le questioni sono:

1. Dati due quaternioni $z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^1$ e $y = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{H}}$, si consideri la mappa

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \overline{\mathbb{H}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{H}} \\ & x & \mapsto & zx\overline{z} + y \end{array} .$$

C'è una formula o un modo veloce di trovare l'asse della rotazione/glissorotazione ρ usando i quaternioni?

2. Qual è l'espressione, tramite quaternioni, della composizione di due generiche rotazioni?

3. Dall'espressione trovata al punto "2." deducete che i quaternioni vi permettono di classificare al volo la composizione di due rotazioni come rotazione o glissorotazione. Vi forniscono immediatamente anche la direzione dell'asse. L'unica cosa che manca è calcolare velocemente asse e componente di glissazione (che si troverebbero usando il punto "1.").